# *Señales y Sistemas II*

## *Módulo I: Señales y Sistemas Discretos*

# *Contenido de este módulo*



**1.- Tipos de señales y operaciones básicas**

**2.- Tipos de sistemas y sus propiedades**

**3.- Respuesta impulsiva y convolución discreta**

**4.- Ecuaciones en diferencias finitas**

**¿Qué es una señal?**

**Señales de tránsito, señales de humo, señalización, señales y sistemas...**

**Algunos conceptos relacionados:**

- **datos**
- **información**

## Según el soporte de su variable y su amplitud

a.- Señales analógicas "*continuas*"

b.- Señales discretas en variable "*discretas*"

c.- Señales discretas en amplitud

d.- Señales digitales

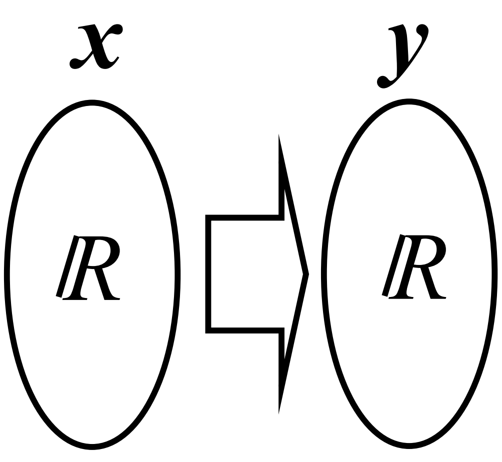
## Según el tipo de descripción utilizada

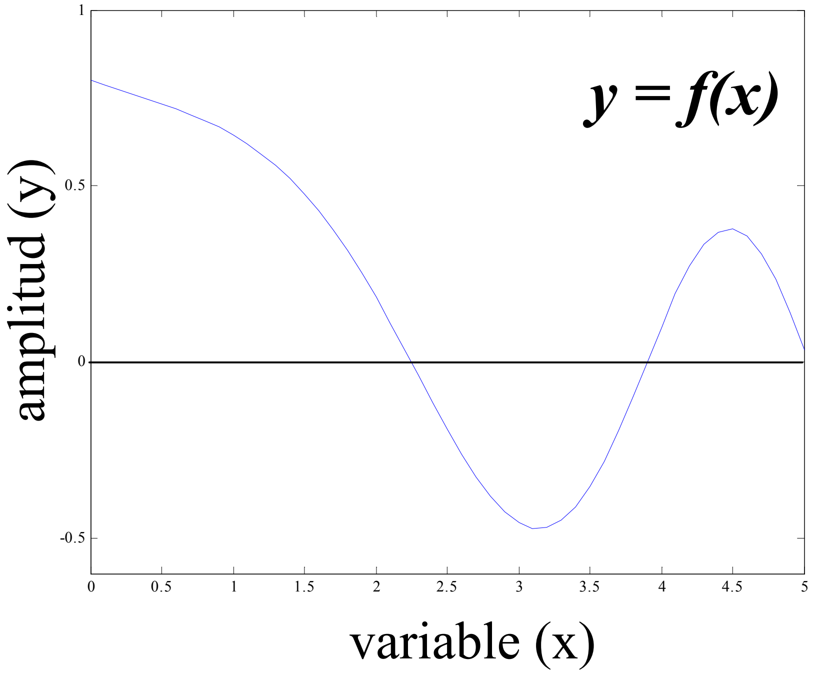
a.- Señales determinísticas (analítica)

b.- Señales estocásticas (probabilística)

- **La variable y la amplitud tienen un soporte continuo**

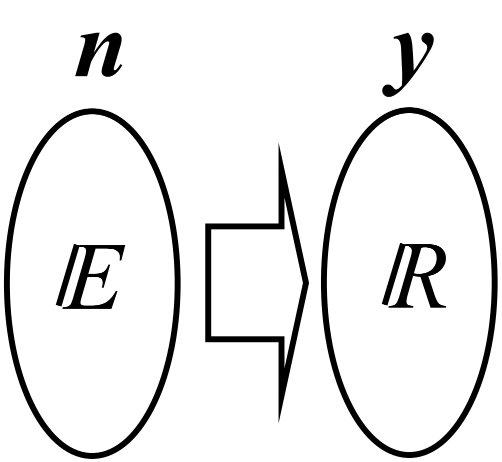
- **Se representa mediante una función**

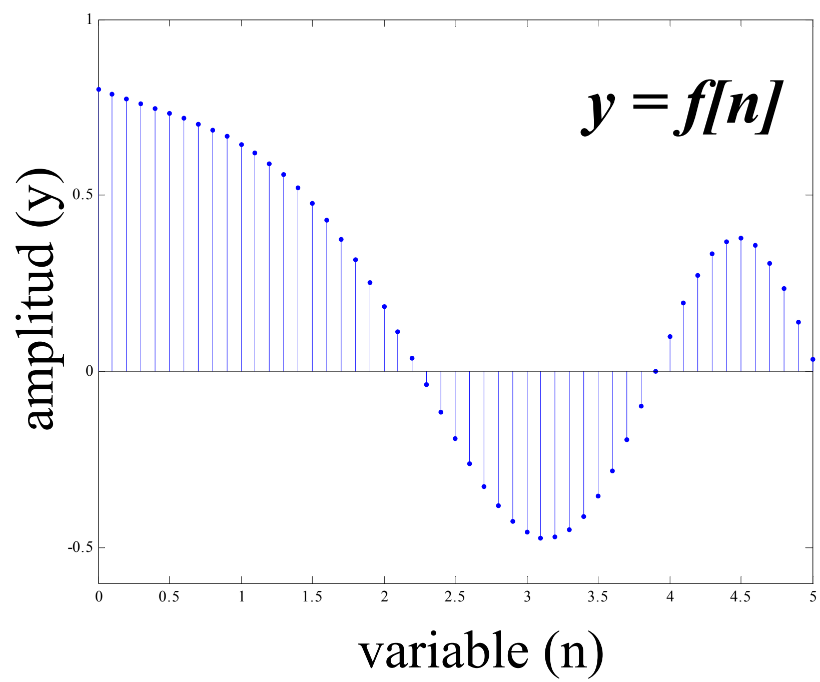


- **La variable tiene un soporte discreto y la amplitud continuo**

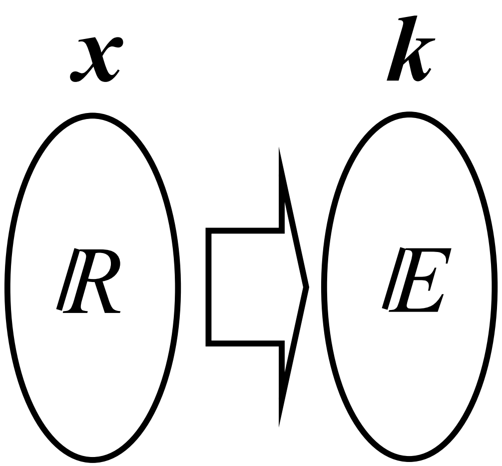
- **Se representa mediante una secuencia**

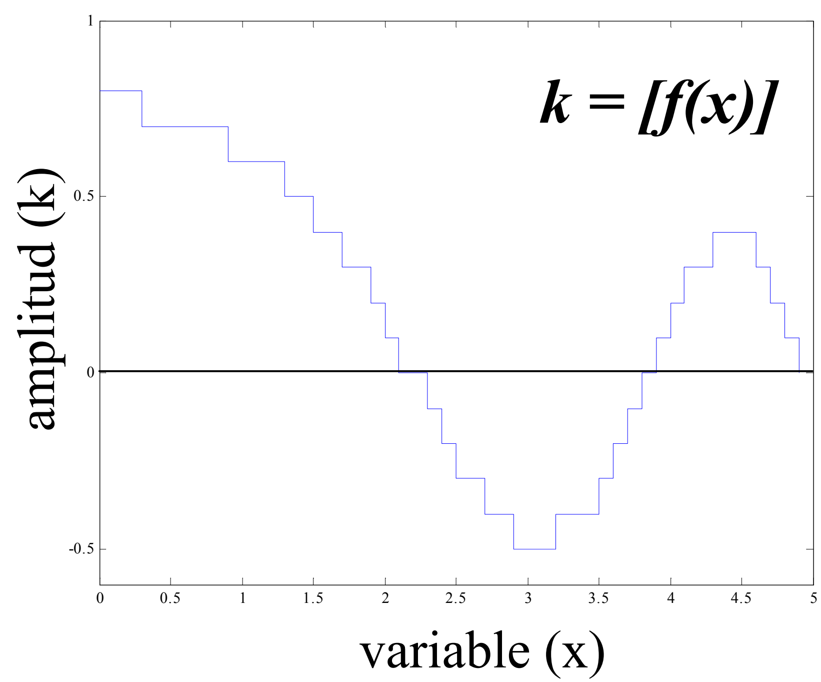


- **La variable tiene un soporte continuo y la amplitud discreto**

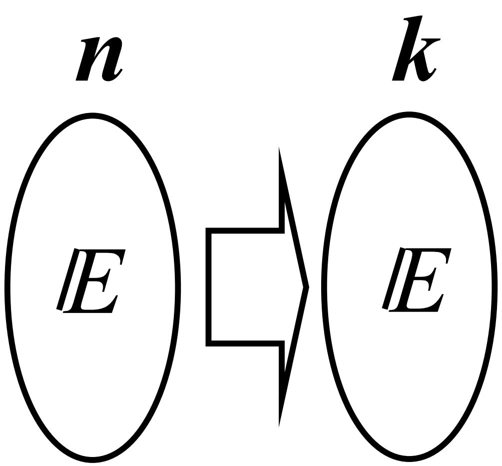
- **Se representa utilizando el operador parte entera**

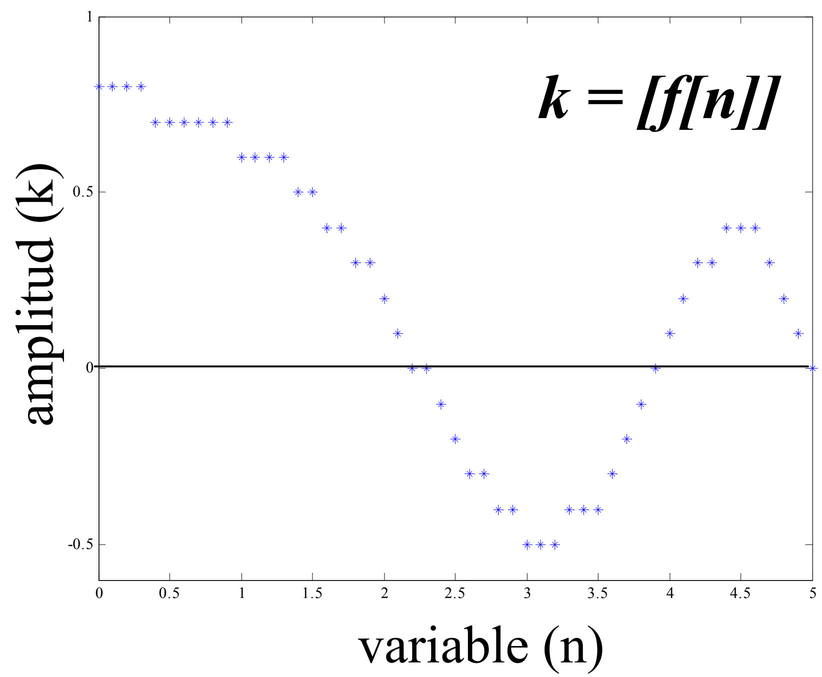


- **La variable y la amplitud tienen un soporte discreto**

- **Se representa utilizando el operador parte entera**



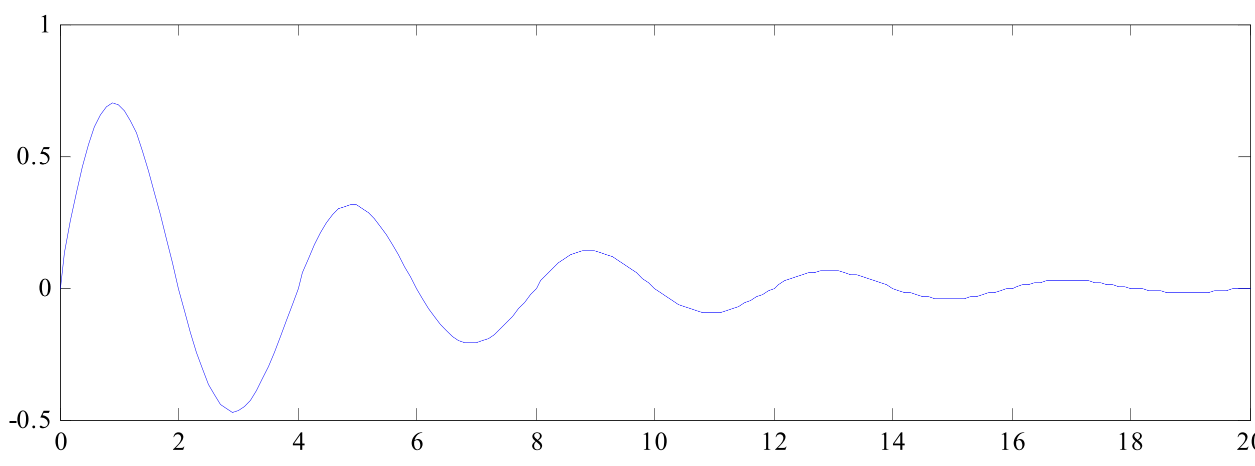



- **Señales que están perfectamente definidas, bien sea por:**

  **1.- extensión (todos sus valores son dados), o**

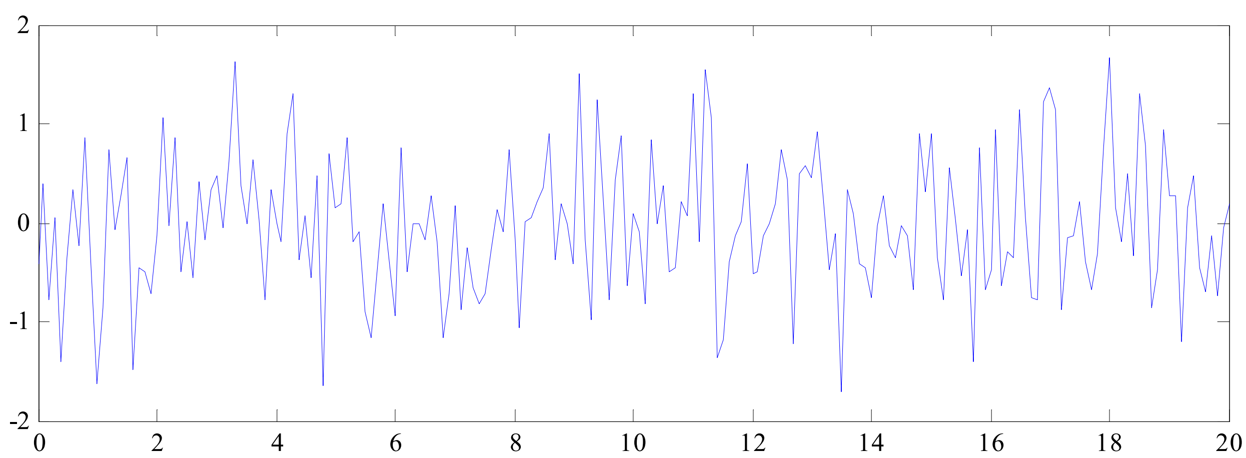
  **2.- comprensión (tienen una expresión analítica)**

**Ejemplo:** $y = a\cos(2\pi f x)\, e^{-x/b}$



- **Señales que no pueden ser definidas ni por comprensión ni por extensión. Se definen algunas de sus propiedades usando probabilidades.**

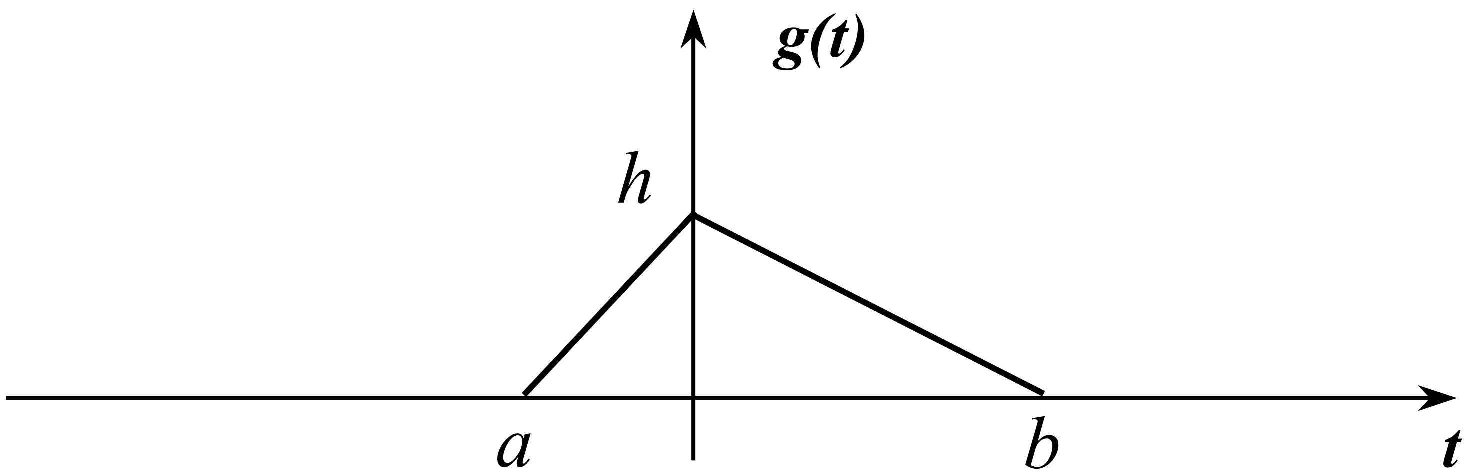
**Ejemplo:** ***Ruido Blanco***



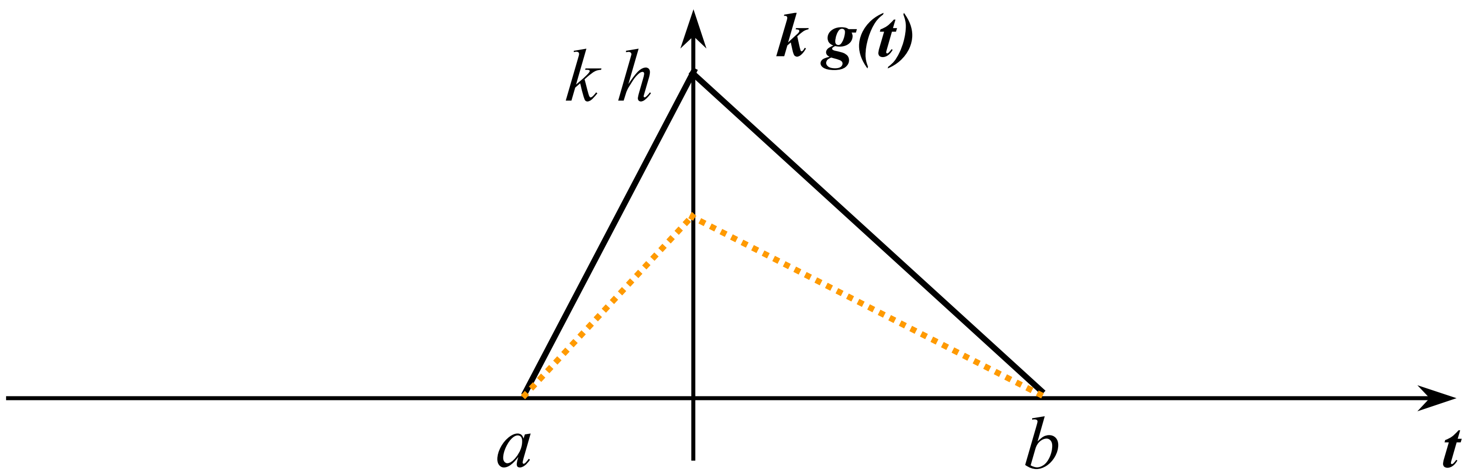
**En este curso nos dedicaremos principalmente al estudio de señales discretas en tiempo (señales discretas en variable, cuya variable es el tiempo), tanto determinísticas como estocásticas.**

***Nota importante: aunque el tipo de señales que ameritan un verdadero interés práctico son las señales digitales, debido a la alta precisión de los computadores actuales podemos conformarnos, por simplicidad y para una gran cantidad de aplicaciones, con el estudio de señales discretas en variable.***

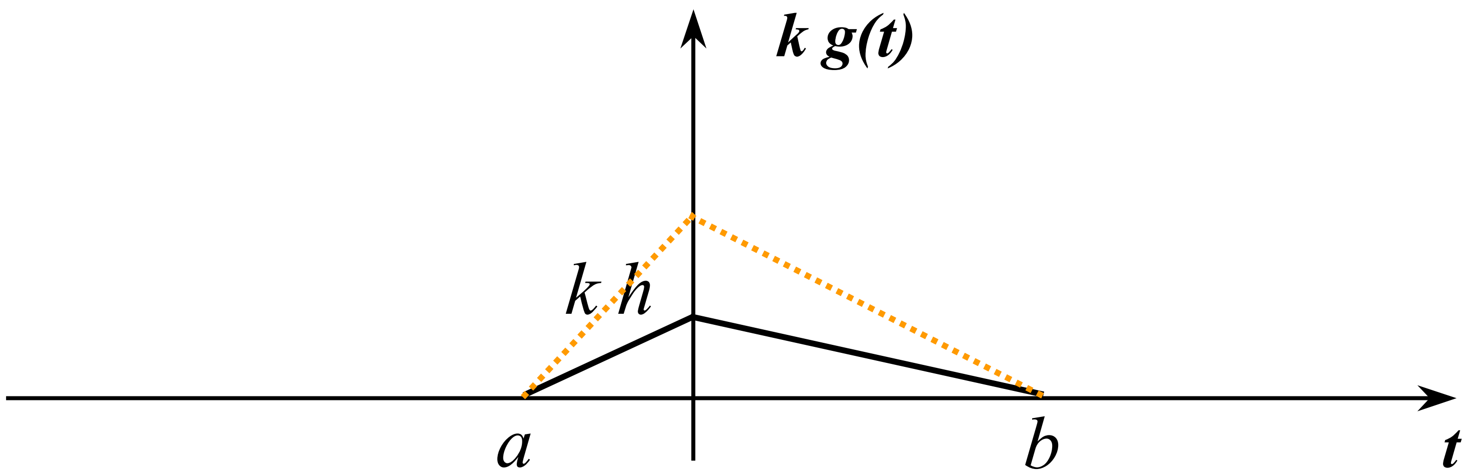
# Consideremos la siguiente señal



- **Multiplicación de la señal por una constante *k > 1***

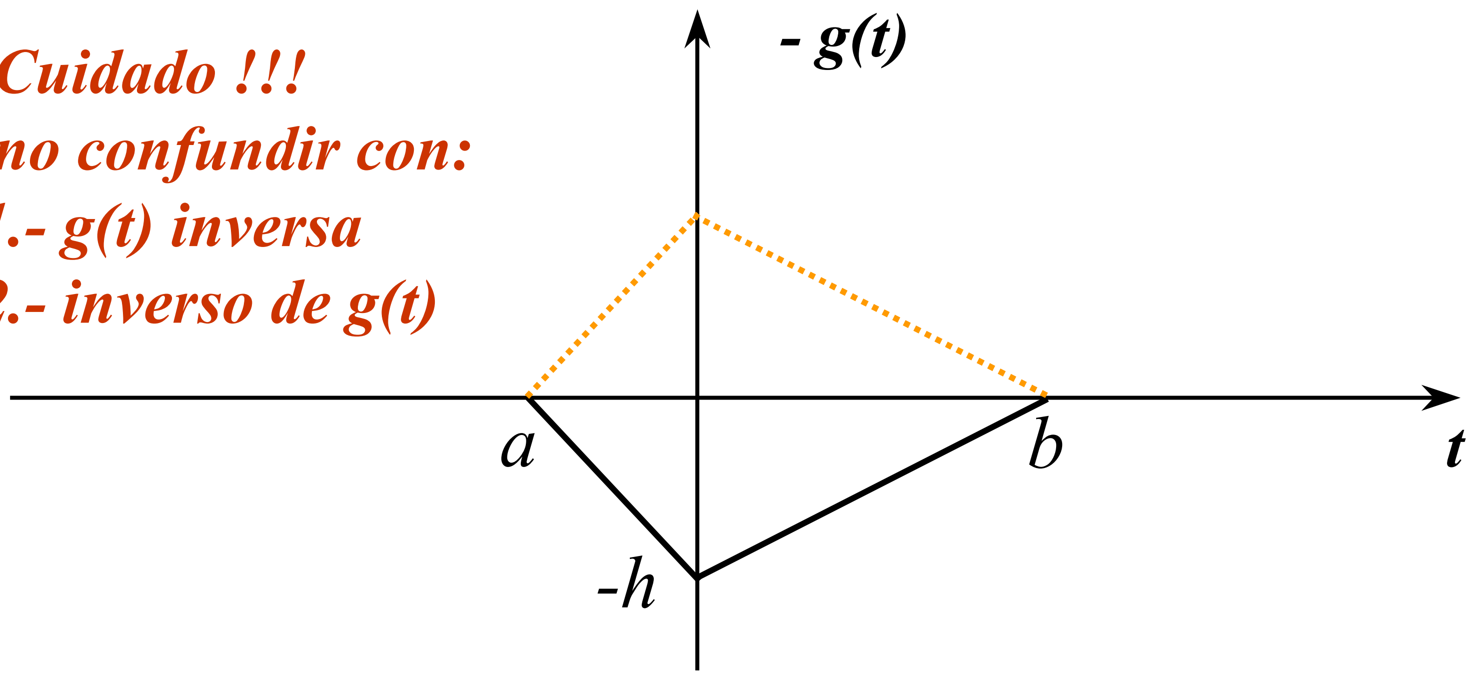


- **Multiplicación de la señal por una constante 0 < *k* < *1***

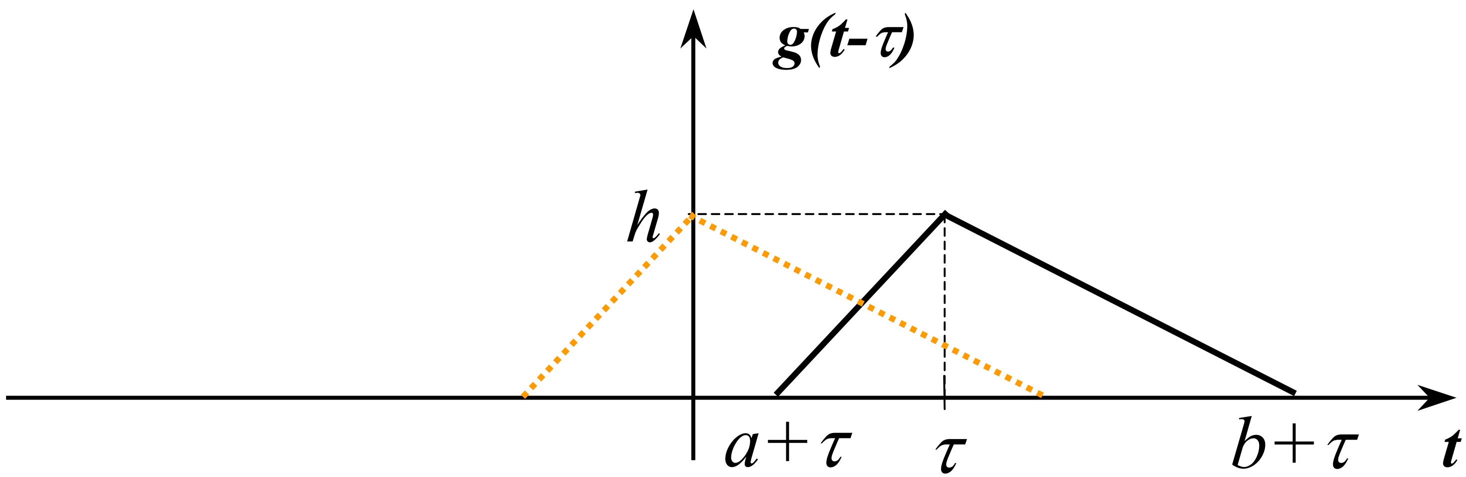


- **Multiplicación de la señal por *k = -1***

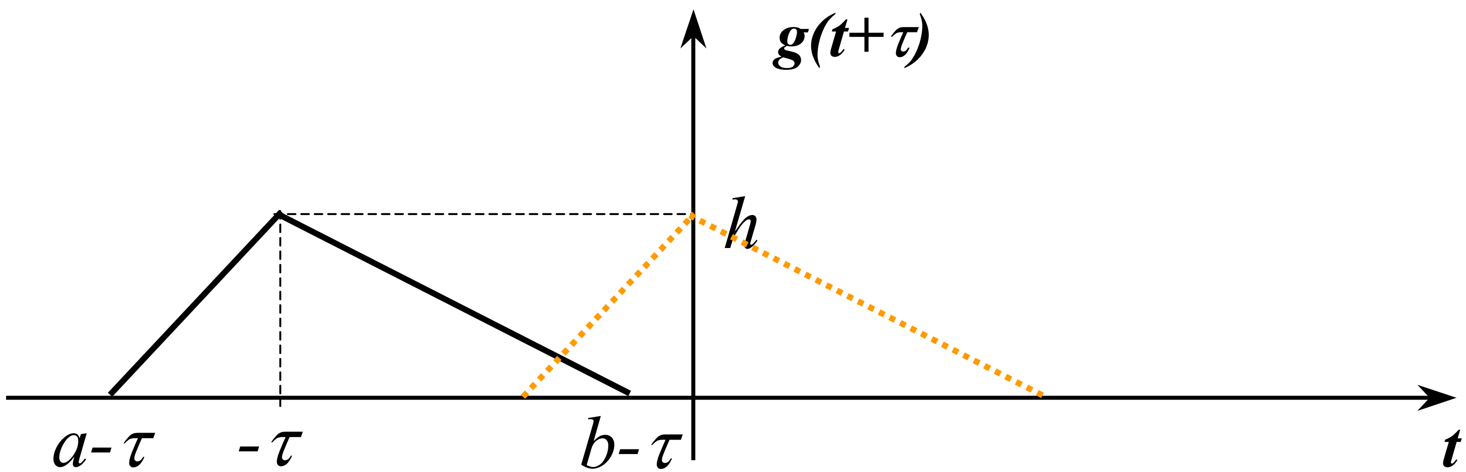
**** Cuidado !!!***
***no confundir con:***
***1.- g(t) inversa***
***2.- inverso de g(t)***



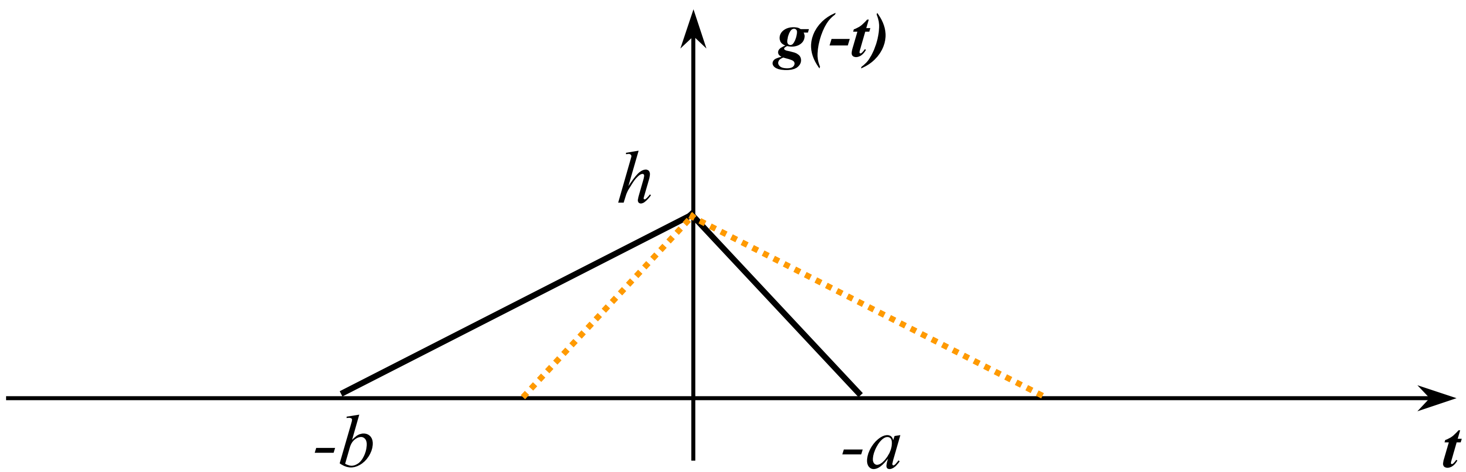
- **Sustracción de una cantidad $\tau > 0$ a la variable**



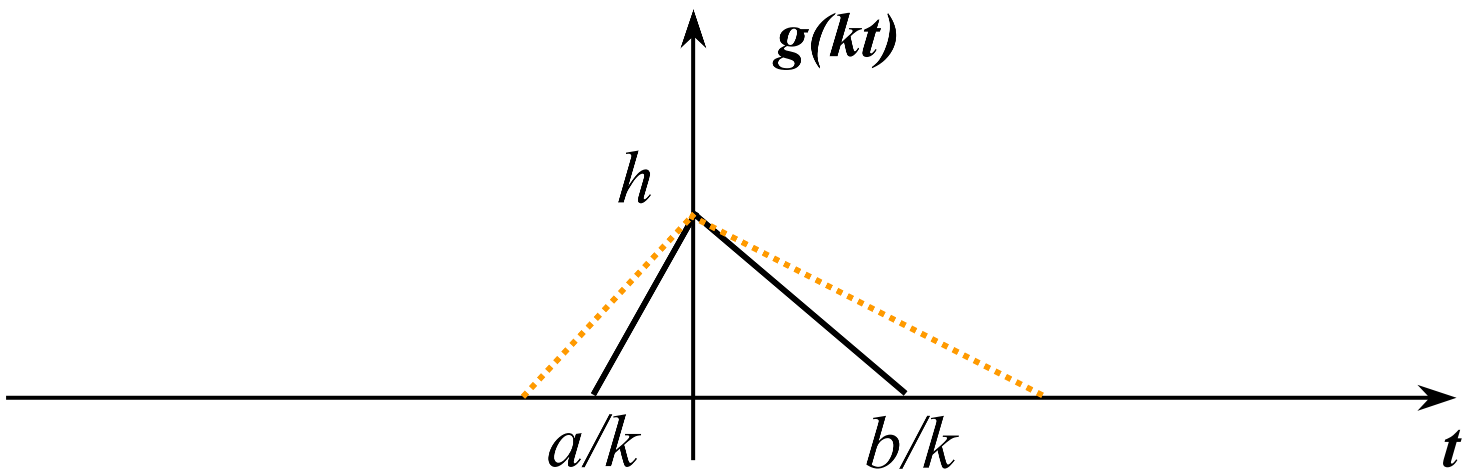
- **Adición de una cantidad $\tau > 0$ a la variable**



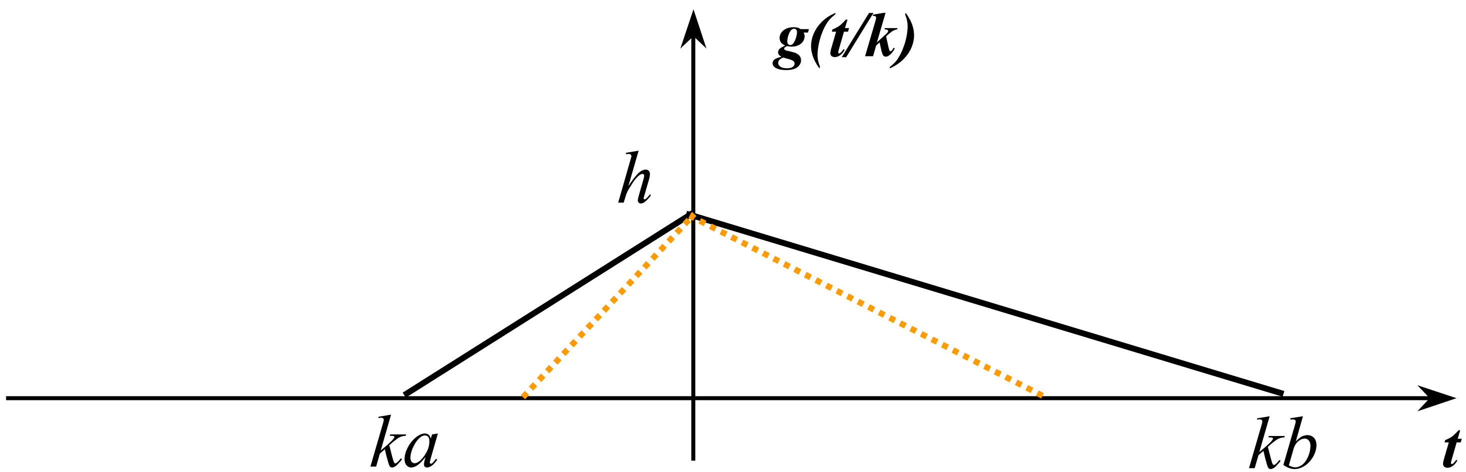
- **Multiplicación de la variable por *–1***



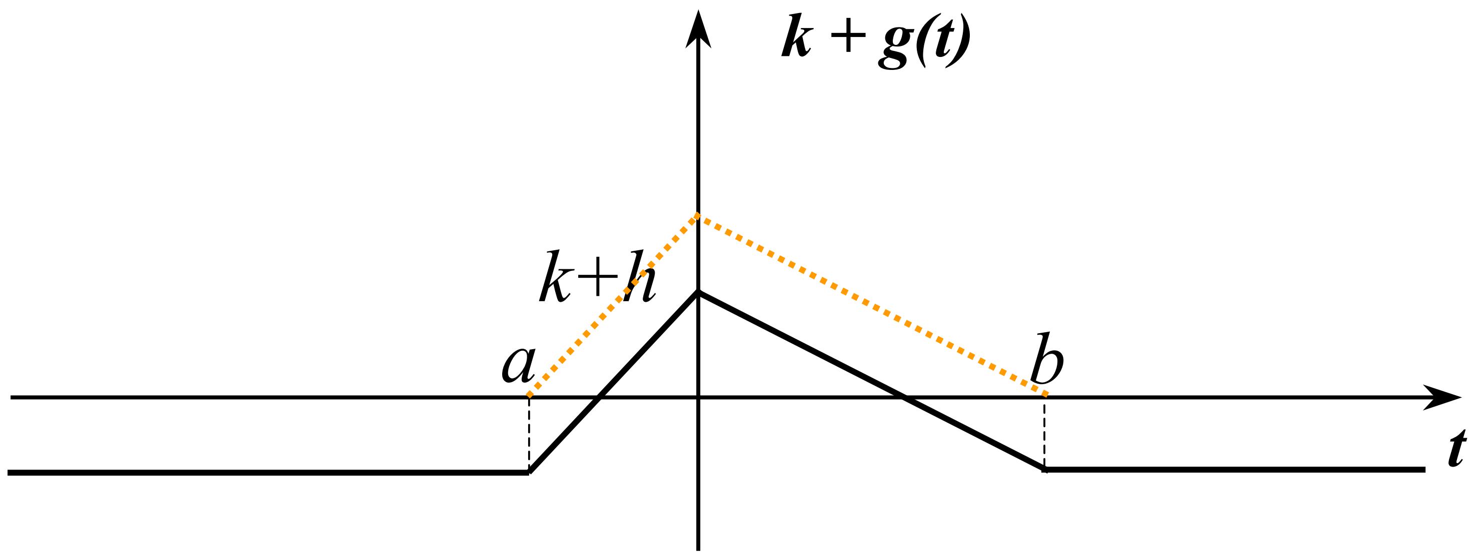
- **Multiplicación de la variable por un factor *k > 1***



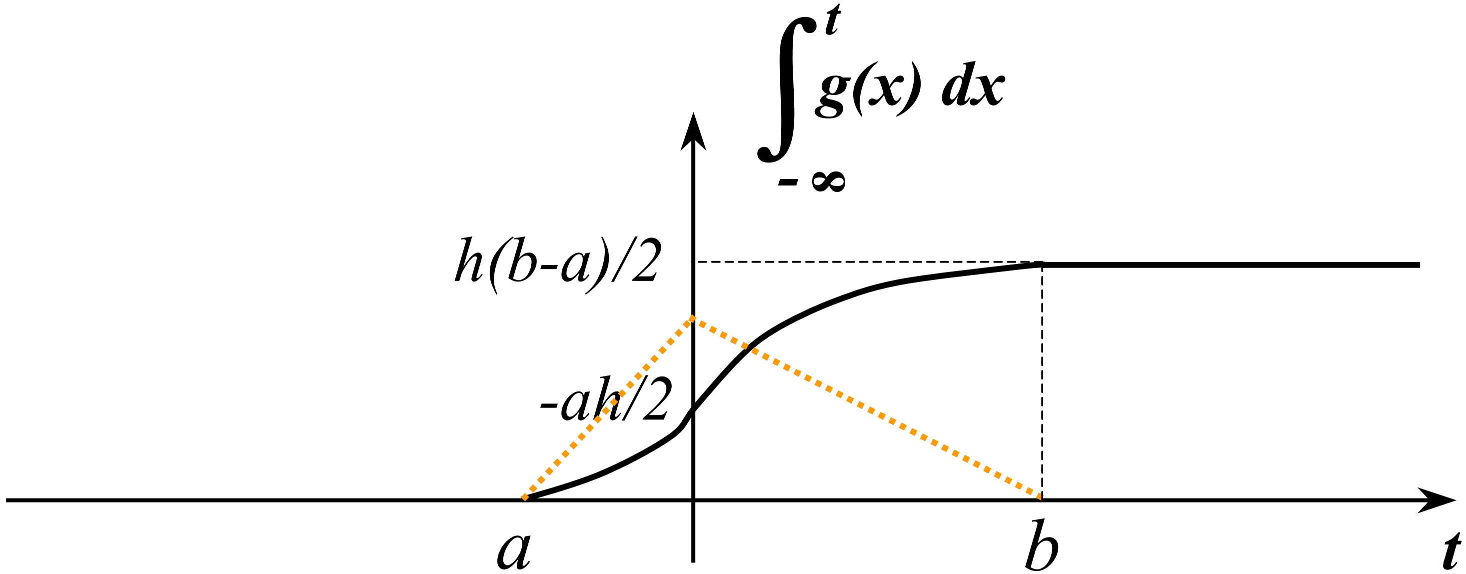
- **División de la variable por un factor *k > 1***



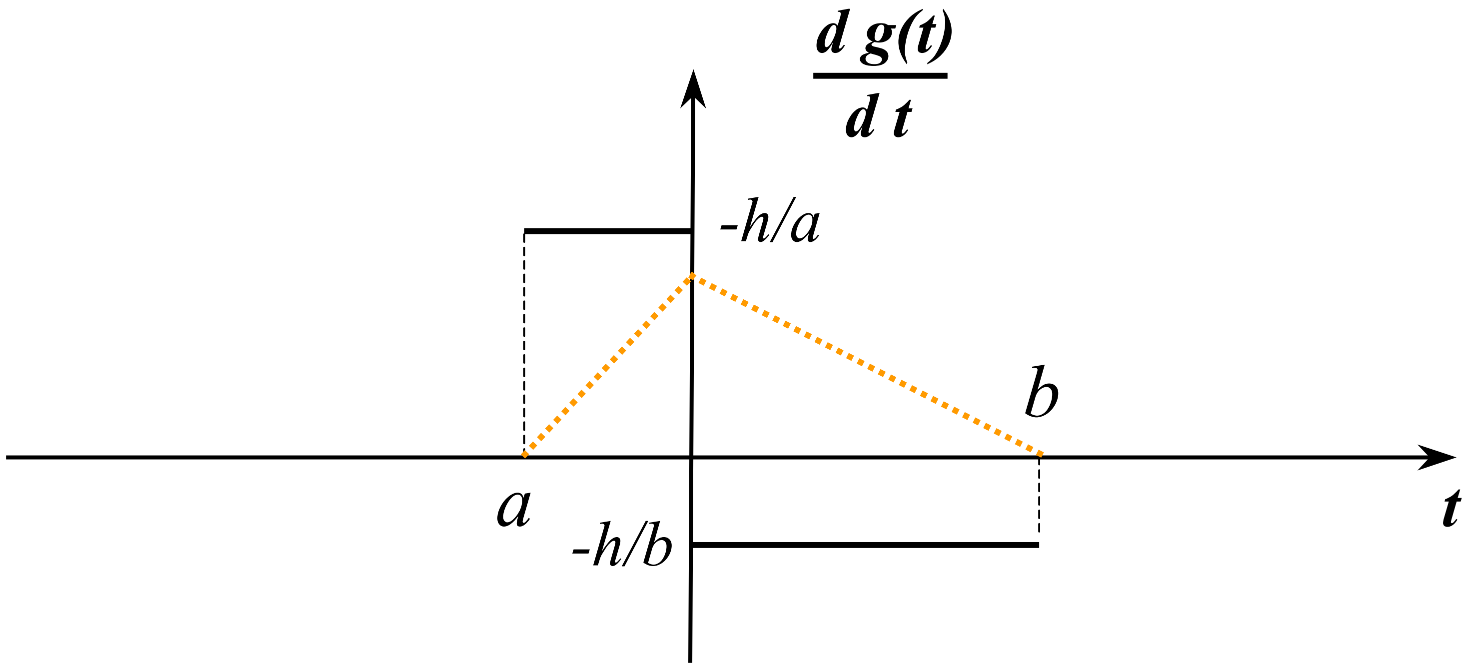
- **Adición de una constante (ó nivel DC) a la señal**



- **Representa el valor del área acumulada bajo *g(t)***



• **Representa el valor de la pendiente de *g(t)***



- **Integración discreta:**

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} g[k]$$

- **Diferenciación discreta:**

$$y[n] = g[n] - g[n-1]$$

- **Periodicidad:** $g(t) = g(t-kT)$ **con** $k$ **entero**

  $T$: **período,** $1/T = f$: **frecuencia**

- **Simetrías**
  - **PAR:** $g(t) = g(-t)$

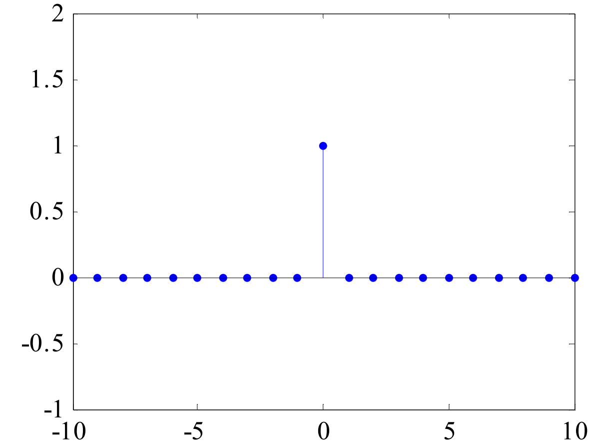
    **La simetría es respecto al eje de amplitud**

  - **IMPAR:** $g(t) = -g(-t)$

    **La simetría es respecto al punto (**$t=0$, $g(t)=0$**)**

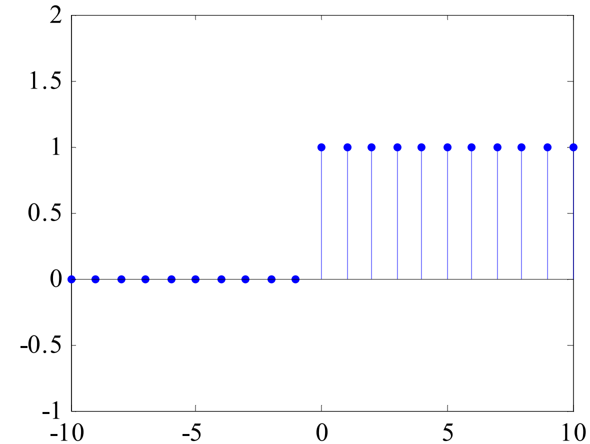
- **IMPULSO UNITARIO (Ó PULSO UNITARIO)**

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



# • ESCALÓN UNITARIO

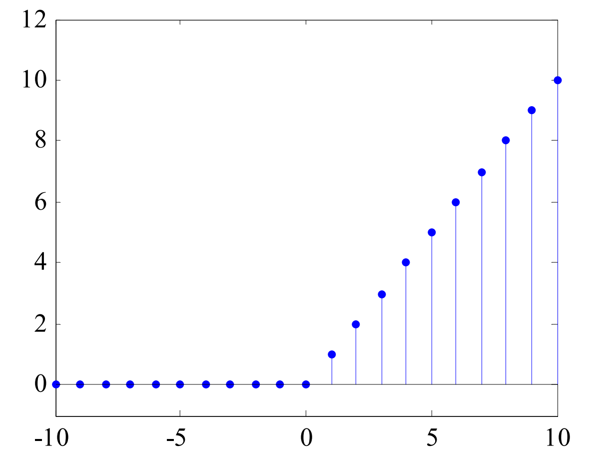
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$




$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \quad \Rightarrow \quad \delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

- **RAMPA UNITARIA**

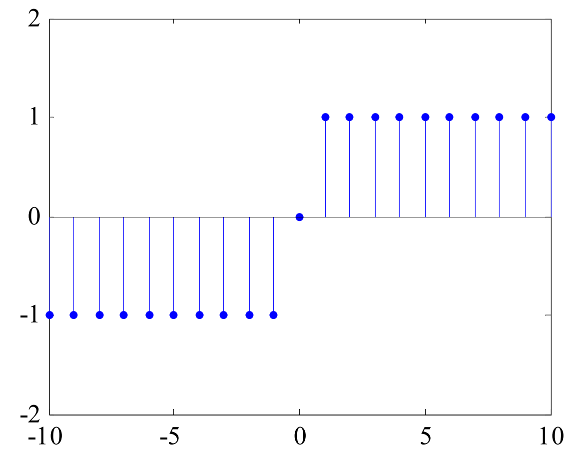
$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$




$$r[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] \quad \Rightarrow \quad u[n] = r[n] - r[n-1]$$

# • FUNCIÓN SIGNO

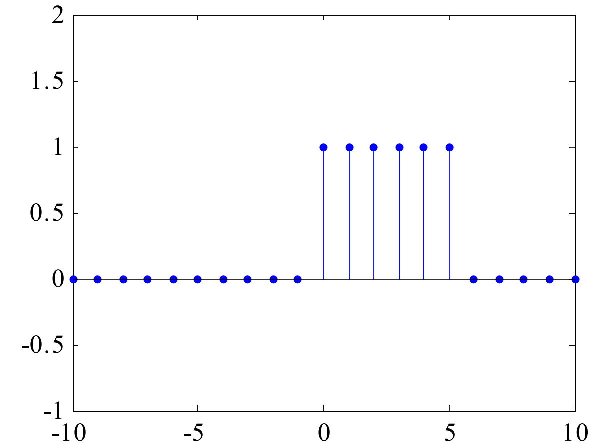
$$sig[n] = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$$




$$sig[n] = 2\,u[n] - 1 - \delta[n]$$

# • PULSO RECTANGULAR

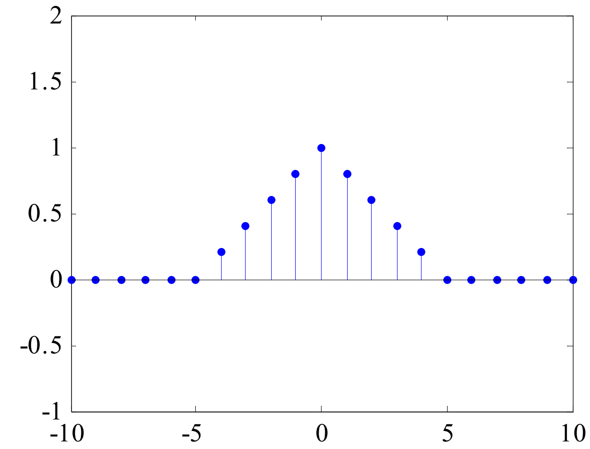
$$P_a[n] = \begin{cases} 1, & a > n \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$




$$P_a[n] = u[n] - u[n-a]$$

# • PULSO TRIANGULAR

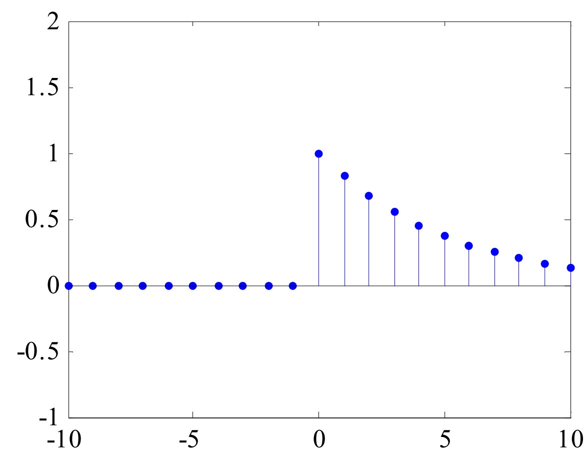
$$T_a[n] = \begin{cases} (a-n)/a, & a > n \geq 0 \\ (a+n)/a, & 0 > n \geq -a \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$




$$T_a[n] = 1/a\ r[n+a]\ u[-n] + 1/a\ r[a-n]\ u[n] - \delta[n]$$

- **EXPONENCIAL DE UN LADO**

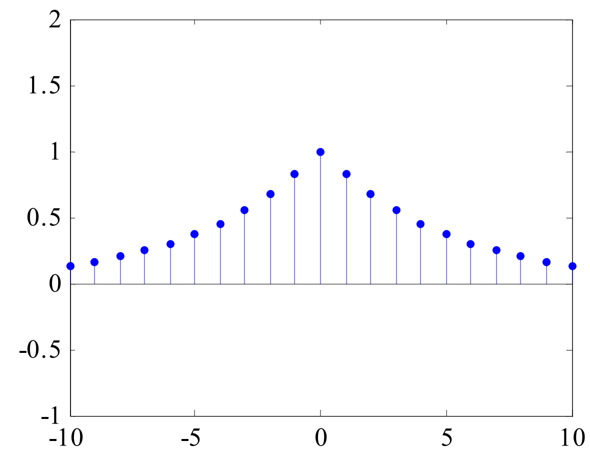
$$E1_a[n] = \begin{cases} e^{-n/a}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$




$$E1_a[n] = e^{-n/a}\, u[n]$$

# • EXPONENCIAL DE DOS LADOS

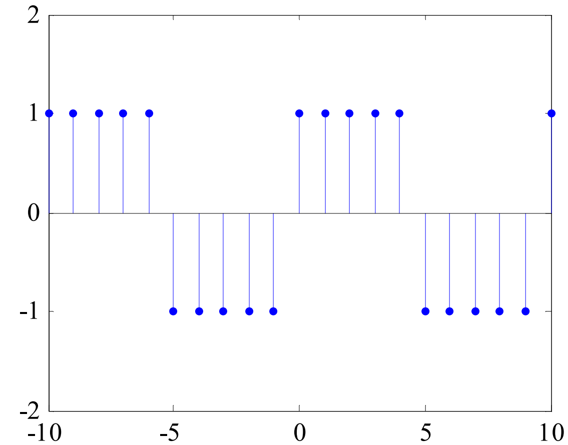
$$E2_a[n] = \begin{cases} e^{-n/a}, & n \geq 0 \\ e^{n/a}, & n < 0 \end{cases}$$




$$E2_a[n] = e^{-n/a}\, u[n] + e^{n/a}\, u[-n] - \delta[n] = e^{-|n/a|}$$

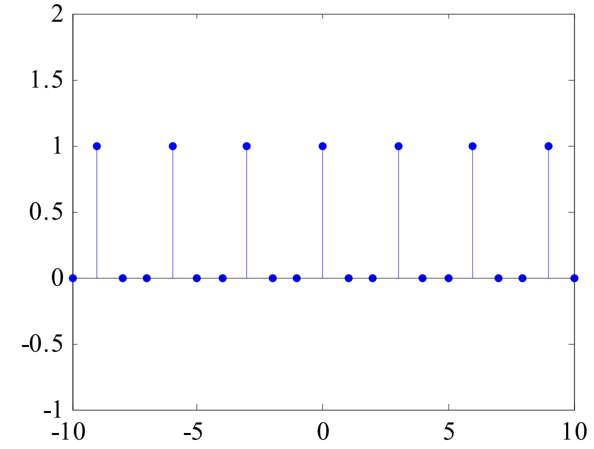
- **ONDA CUADRADA**

$$S_a[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k P_a[n-ak]$$



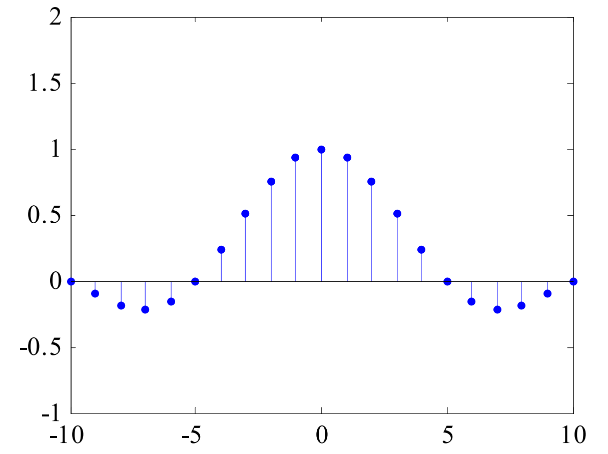
# • TREN DE IMPULSOS

$$T\delta_a[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-ak]$$



- **FUNCIÓN SINC**

$$Sinc_b[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi b n)}{(\pi b n)}, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

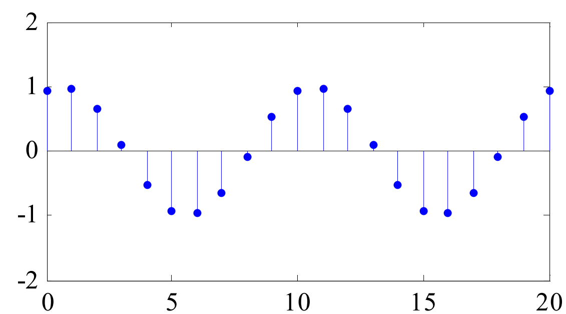


**Fórmula de Euler**

$$exp_{\omega,\phi}[n] = e^{j(\omega n+\phi)} = cos(\omega n+\phi) + j\ sin(\omega n+\phi)$$

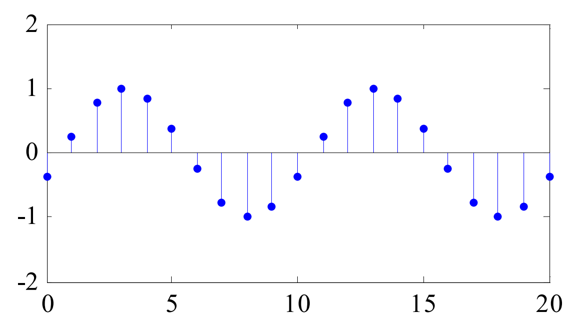
## Parte Real

$$cos(\omega n+\phi) = Re\{exp_{\omega,\phi}[n]\}$$




## Parte Imaginaria

$$sin(\omega n+\phi) = Im\{exp_{\omega,\phi}[n]\}$$



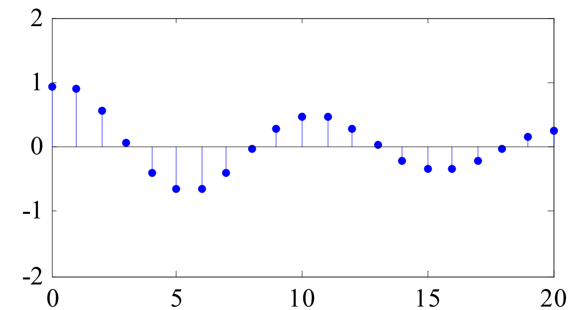
# *La exponencial compleja amortiguada*



$$exp_{a,\omega,\phi}[n] = e^{-an+j(\omega n+\phi)} = e^{-an}\,(cos(\omega n+\phi)+j\,sin(\omega n+\phi))$$

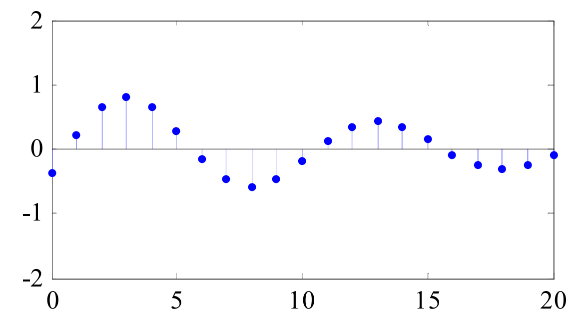
**Parte Real**

$$e^{-an}\,cos(\omega n+\phi) = Re\{exp_{a,\omega,\phi}[n]\}$$




**Parte Imaginaria**

$$e^{-an}\,sin(\omega n+\phi) = Im\{exp_{a,\omega,\phi}[n]\}$$



- **SINUSOIDES NO PERIÓDICAS !!!**

**La señal discreta $f[n] = sin(2\pi f\, n)$ no necesariamente es una señal periódica, halla aquellos valores de $f$ para los cuales $f[n]$ es periódica.**

- **RESPUESTA**

**Para que $f[n]$ sea periódica con período $N$ (entero),**

**debe cumplirse que $f[n] = f[n+kN]$ para todo $k$ entero.**

**Entonces:**

$$\sin(2\pi f n) = \sin(2\pi f (n+kN)) = \sin(2\pi f n + 2\pi f kN)$$

**donde $2\pi f kN$ debe ser un múltiplo entero de $2\pi$.**

**De aquí se concluye que:**

$$f kN = m \Longrightarrow f = m/(nN) \Longrightarrow \boxed{f \text{ debe ser Racional}}$$

**Señal de entrada** **Señal de salida**


$$y[n] = operación\{\, x[n] \,\}$$

- **Un sistema se define BIBO estable, si para toda señal de entrada *x[n]* acotada la salida resultante *y[n]* también es acotada.**

**Es decir:**

**Si para cualquier $|x[n]| \leq M_x < \infty$, existe un $M_y$ tal que $|y[n]| \leq M_y < \infty$, entonces el sistema es BIBO estable.**

- **Un sistema se define causal, si para cualquier valor *k*, la salida *y[k]* sólo depende de los valores de la entrada *x[n]* con *n* < *k*.**

**Es decir:**

**Si *y[n=k] = operación{ x[k], x[k-1], x[k-2], ... }* para todo *k*, entonces el sistema es causal.**

- **Un sistema se define sin memoria, si para cualquier valor *k*, la salida *y[k]* sólo depende de la entrada *x[k]*.**

**Es decir:**

**Si *y[n=k] = operación{ x[k] }* para todo *k*, entonces el sistema es sin memoria.**

- **Un sistema *T* con entrada *x[n]* y salida *y[n]* se define invertible, si existe otro sistema $T^{-1}$ tal que permita recuperar la señal *x[n]* a partir de la señal *y[n]*.**

**Es decir:**

**Si existe $T^{-1}$ tal que $x[n] = T^{-1}\{\, T\{\, x[n] \,\}\,\}$ entonces el sistema *T* es invertible.**

- **Un sistema se define invariante en tiempo, si cualquier retardo o adelanto de la señal de entrada *x[n]* produce el mismo retardo o adelanto en la señal de salida *y[n]*.**

**Es decir:**

**Si *y[n-k] = operación{ x[n-k] }* para cualquier valor de *k*, entonces el sistema es invariante en tiempo.**

- **Un sistema se define lineal si cumple el principio de superposición (la salida a una combinación de entradas es igual a la combinación de las salidas de cada una de las entradas por separado).**

**Es decir, dados:** **1.-** $y_1[n] = operación\{ x_1[n] \}$

**2.-** $y_2[n] = operación\{ x_2[n] \}$

**3.-** $y[n] = operación\{ a\, x_1[n] + b\, x_2[n]\}$

**El sistema es lineal si, y sólo si,** $y[n] = a\, y_1[n] + b\, y_2[n]$**.**

• **La linealidad implica dos propiedades fundamentales a saber:**

**1.- Propiedad de aditividad:**

$$operación\{x_1[n]+x_2[n]\} = operación\{x_1[n]\}+operación\{x_2[n]\}$$

**2.- Propiedad de escalamiento:**

$$operación\{a\, x[n]\} = a\; operación\{x[n]\}$$

- **EVALUACIÓN DE SISTEMAS**

**Considera los tres sistemas mostrados a continuación:**

**1.-** $y[n] = (x[n])^2$

**2.-** $y[n] = x[Nn]$

**3.-** $y[n] = x[n-1] + x[n+1]$

**Di cuál de ellos es LIT (lineal e invariante en tiempo)**

- **RESPUESTA**

**1.-** $y[n] = (x[n])^2$ **NO LINEAL**

$$(a\,x_1[n] + b\,x_2[n])^2 \neq a\,(x_1[n])^2 + b\,(x_2[n])^2$$

**2.-** $y[n] = x[Nn]$ **VARIANTE EN TIEMPO**

$$x[N(n+k)] \neq x[Nn+k]$$

**3.-** $y[n] = x[n-1] + x[n+1]$ **LIT !!!**

- **RETARDADOR IDEAL**

$$y[n] = x[n - n_d]$$

**DESCRIPCIÓN: retarda ($n_d>0$), ó adelanta ($n_d<0$), la señal de entrada $x[n]$ un número $|n_d|$ muestras.**

- **PROMEDIO MÓVIL**

$$y[n] = \frac{1}{M+N+1} \sum_{k=-M}^{N} x[n-k]$$

**DESCRIPCIÓN: calcula el promedio de la señal de entrada *x[n]* en una ventana de *M+N+1* muestras.**

• **COMPRESOR IDEAL**

$$y[n] = x[Mn], \quad \text{con } M \text{ entero positivo}$$

**DESCRIPCIÓN: este sistema descarta *M-1* muestras de cada *M* muestras.**

- **ACUMULADOR Ó INTEGRADOR DISCRETO**

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

**DESCRIPCIÓN: calcula la suma acumulada de las muestras de la señal de entrada desde menos infinito hasta *n*.**

- **DIFERENCIADOR DISCRETO CAUSAL**

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

**DESCRIPCIÓN: calcula la diferencia entre muestras consecutivas de la señal de entrada.**

**Cualquier señal discreta *x[n]* puede representarse como una suma pesada de impulsos discretos de la siguiente manera:**

$$\ldots\, x[-1]\;\delta[n+1] + x[0]\;\delta[n] + x[1]\;\delta[n-1] + \ldots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\;\delta[n-k]$$

**Esta propiedad de la función impulso es de fundamental importancia en la representación de sistemas Lineales e Invariantes en Tiempo (LIT)**

**Consideremos el sistema *T*, tal que *y[n] = T{ x[n] }*, de acuerdo con la propiedad vista de la función impulso:**

$$y[n] = T\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ \delta[n-k] \right\}$$

**Adicionalmente, si el sistema es LIT:**

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ T\{\delta[n-k]\}$$

**donde $T\{\delta[n]\}$ se denomina la respuesta impulsiva de *T***

**Definamos $h[n] = T\{\delta[n]\}$ como la respuesta impulsiva del sistema $T$, de forma tal que:**

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, T\{\delta[n-k]\} = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = x[n] * h[n]}$$

**La expresión anterior se denomina suma de convolución discreta y se representa con el símbolo $*$**

**De lo visto anteriormente se derivan dos conclusiones importantísimas sobre los sistemas LIT:**

**1.- La respuesta impulsiva *h[n]* de un sistema LIT es lo único que hace falta para caracterizarlo totalmente.**

**2.- La salida *y[n]* de un sistema LIT a cualquier entrada *x[n]* se puede calcular mediante la convolución entre su respuesta impulsiva y la entrada:** $y[n] = x[n] * h[n]$**.**

**Consideremos la convolución de las dos señales *f[n]* y *g[n]*:**

$$q[n] = f[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, g[n-k]$$

**Secuencia g[k] rebatida y retardada**

$f[k]$ ... 0, 0, 1, 2, -1, 3, 0, 0 ...

$g[n_0-k]$ ... 0, 0, 1, 2, -1, 3, 0, 0 ...

$f[k]\, g[n_0-k]$ ... $0, \underbrace{0, 0, 2, -2, -3, 0, 0,}_{-3 = q[n_0]} 0$ ...

- **CONVOLUCIÓN DISCRETA**

**Considera las siguientes señales discretas:**

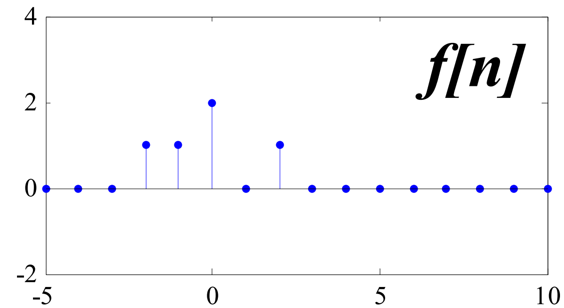
**1.-** $f[n] = P_5[n+2] - \delta[n-1] + \delta[n]$

**2.-** $g[n] = 1/2\ (r[n]\ u[4-n] + \delta[n-1]) - 5/2\ \delta[n-3]$

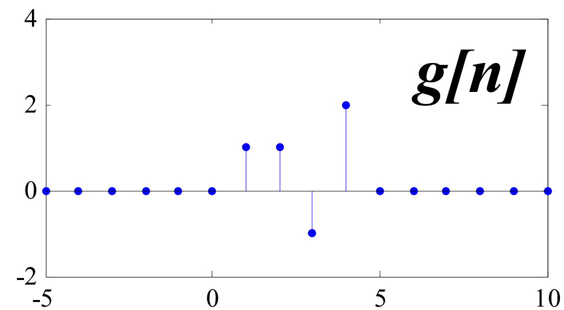
**a.- calcula la convolución** $q[n] = f[n] * g[n]$

**b.- grafica las secuencias** $q[n]$, $f[n]$ **y** $g[n]$

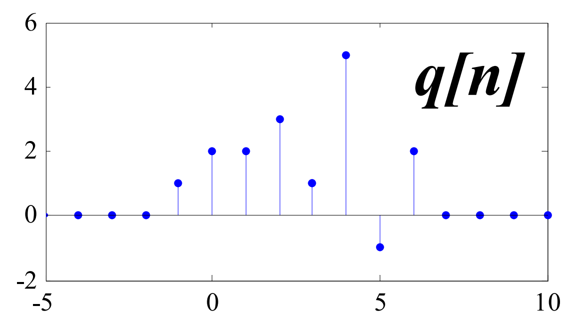
- **RESPUESTA**




$$f[n] = \{\ldots 0, 1, 1, \underset{n=0}{2}, 0, 1, 0 \ldots\}$$




$$g[n] = \{\ldots 0, \underset{n=0}{0}, 1, 1, -1, 2, 0 \ldots\}$$




$$q[n] = \{\ldots 0, 1, \underset{n=0}{2}, 2, 3, 1, 5, -1, 2, 0 \ldots\}$$

- **COMMUTATIVIDAD**

$$f[n] * g[n] = g[n] * f[n]$$

- **ASOCIATIVIDAD**

$$q[n] * (f[n] * g[n]) = (q[n] * f[n]) * g[n]$$

- **DISTRIBUTIVIDAD SOBRE LA SUMA**

$$q[n] * (f[n]+g[n]) = q[n] * f[n] + q[n] * g[n]$$

- **PROPIEDAD DE DESPLAZAMIENTO**

$$f[n] * \delta[n-k] = f[n-k]$$

- **ESTABILIDAD**

**Un sistema LIT es estable si, y sólo si,** $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

- **CAUSALIDAD**

**Un sistema LIT es causal si, y sólo si,** $h[n] = 0$ **para todo** $n < 0$

- **INVERTIBILIDAD**

**Un sistema LIT es invertible si, y sólo si, existe** $w[n]$ **tal que** $h[n] * w[n] = \delta[n]$

# *Sistemas LIT conectados en cascada*



$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

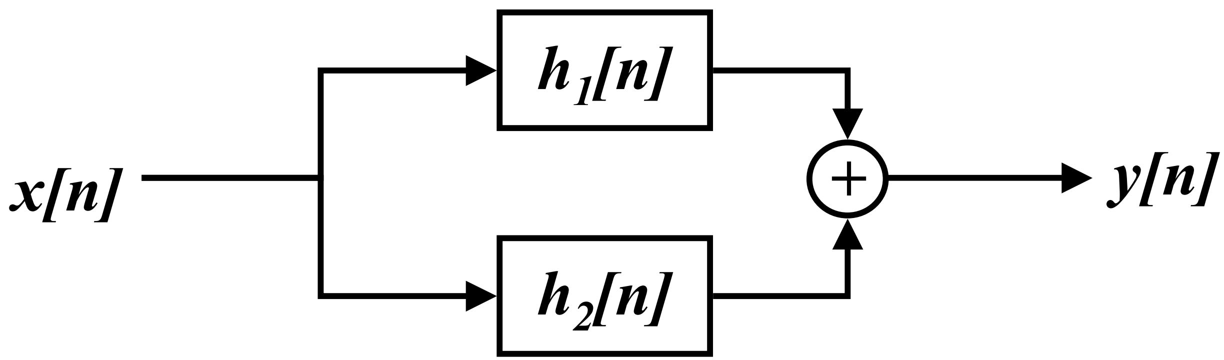
$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n] * h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n])$$

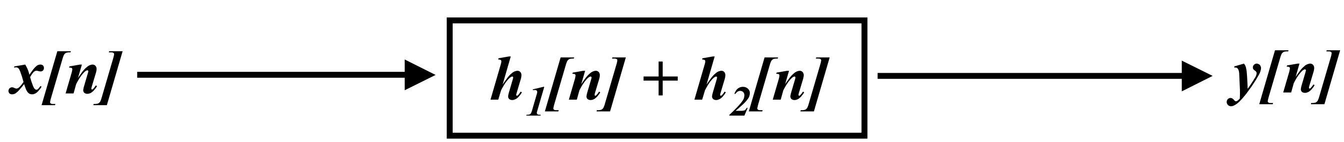
$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow y[n]$$

# Sistemas LIT conectados en paralelo






$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n]) = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$



- **FIR (Finite-duration Impulse Response)**

  **Sistemas de respuesta impulsiva con duración finita**

  $h[n] = 0$ **para** $n < N_{min}$ **y para** $n > N_{max}$

- **IIR (Infinite-duration Impulse Response)**

  **Sistemas de respuesta impulsiva con duración infinita**

  $h[n] \neq 0$ **para** $n \rightarrow \infty$ **y/o para** $n \rightarrow -\infty$

## • RESPUESTAS IMPULSIVAS

**Determina la respuesta impulsiva del siguiente sistema:**


**Donde *Acc* es el acumulador y *Diff* es el diferenciador discreto causal**

- **RESPUESTA**

**La respuesta impulsiva del sistema está dada por:**

$$h[n] = h_{Acc}[n] * h_{Diff}[n]$$

**donde,** $h_{Acc}[n] = u[n]$ **y** $h_{Diff}[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

**de forma que,** $h[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1])$

**y finalmente usando la propiedad de desplazamiento**

$$h[n] = u[n] - u[n-1] \Longrightarrow \boxed{h[n] = \delta[n]}$$

1.- Tipos de señales y operaciones básicas

2.- Tipos de sistemas y sus propiedades

3.- Respuesta impulsiva y convolución discreta

4.- Ecuaciones en diferencias finitas

**Consideremos la ecuación**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

**Este tipo de ecuación se denomina ecuación lineal en diferencias de orden *N* con coeficientes constantes, y representa una clase particular de sistema con entrada *x[n]* y salida *y[n]*.**

**Otra forma de escribir la misma ecuación es la siguiente:**

$$y[n] = 1/a_0 \left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] \right\}$$

- **Aquí se evidencia como la salida $y[n]$ puede ser calculada en forma recursiva a partir de los valores de la entrada $x[n]$ y de valores previamente calculados de $y[n]$.**
- **La resolución de una ecuación en diferencias de orden $N$ requiere el conocimiento de las $N$ condiciones iniciales $y[n_0-m]$ para $m = 1, 2, ..., N$.**

## *Condición inicial de reposo*



- **Si las *N* condiciones iniciales, $y[n_0-m]$ para $m = 1, 2, ..., N$, de una ecuación de diferencias de orden *N* son iguales a cero, se dice que el sistema está inicialmente en reposo.**

- **En este caso se cumple que el sistema representado por la ecuación en diferencias es LIT y Causal.**

**Consideremos el diferenciador discreto causal presentado en la sección *2*, el cual fue definido como:**

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

**Esta definición constituye en sí misma una ecuación en diferencias de orden 0 ($N=0$), con $a_0=1$, $M=1$, $b_0=1$ y $b_1= -1$.**

**Consideremos el acumulador presentado en la sección *2*, el cual fue definido como:**

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$

**Esta definición constituye una ecuación en diferencias de primer orden (*N=1*), con $a_0=1$, $a_1= -1$, $M=0$, $b_0=1$.**

• **CÁLCULO DE UNA IIR**

**Considera el sistema descrito por la ecuación:**

$$y[n] = x[n] + \tfrac{1}{2}\, y[n-1]$$

**calcula la respuesta al impulso de dicho sistema para la condición inicial** $y[-1] = -2$

- **RESPUESTA**

**Consideremos los valores de $n > -1$:**

$$y[0] = \delta[0] + \tfrac{1}{2}\, y[-1] = 1 + \tfrac{1}{2}\,(-2) = 0$$

$$y[1] = \delta[1] + \tfrac{1}{2}\, y[0] = 0 + \tfrac{1}{2}\, 0 = 0 \;\Rightarrow\; y[n] = 0,\ n > -1$$

**Consideremos ahora los valores de $n < 0$:**

$$y[n] = \delta[n] + \tfrac{1}{2}\, y[n-1] \;\Rightarrow\; y[n-1] = 2\,(y[n] - \delta[n])$$

$$y[-1] = 2\,(y[0] - \delta[0]) = 2\,(0 - 1) = -2$$

$$y[-2] = 2\,(y[-1] - \delta[-1]) = 2\,(-2 - 0) = -4$$

$$y[-3] = 2\,(y[-2] - \delta[-2]) = 2\,(-4 - 0) = -8$$

**De donde podemos concluir que** $\boxed{h[n] = 2^{-n}\,(u[n]-1)}$

# *Fin del Módulo I*

## *Señales y Sistemas Discretos*