

Wavelet transform and filter banks theory relationship. A revision

*Trina Adrián de Pérez, Margarita Juanatey, Luis Urbano
and Rafael Banchs*

*Grupo de Procesamiento de Señales, Departamento de Electrónica y Circuitos
Universidad Simón Bolívar, Apartado 89000. Caracas 1080A- Venezuela
Teléfono: 02-9063630. Fax: 02-9063631. E-mail: tperez@usb.ve*

Abstract

The search for methods to analyze signals, aimed at obtaining the attributes related to the physical properties that generate these signals, has always been a topic of interest to engineers and mathematicians. One of the most widely used techniques has been representing the signals in the time domain; frequency domain analysis or Fourier analysis complements this information. However for non-stationary signals another tool is needed. This produced the idea of a new signal representation using other basis functions to obtain a better time-frequency resolution compromise. This was defined as the wavelet transform. Also, in recent years, the theory of perfect reconstruction filter banks has been impelled by the search of methods that optimize the storing and transmission of information. This paper introduces the wavelet transform and perfect reconstruction filter banks basics concepts and presents their relationships. This connection makes it possible to present a wavelet transform method based in a filter design that produces the best signal bands analysis.

Key words: Wavelet, filters, multiresolution.

Relación entre la transformada de ondículas y la teoría de bancos de filtros. Una revisión

Resumen

La búsqueda de métodos para analizar señales, con el propósito de obtener atributos de los procesos físicos que las generan, ha sido siempre tema de interés de matemáticos e ingenieros. Lo más común es representar la señal en el dominio del tiempo; el dominio de la frecuencia, proporcionado a través del análisis de Fourier, complementa esa información. Sin embargo si las señales son no-estacionarias parece necesario buscar nuevas alternativas. Se piensa entonces en representar la función con otro tipo de bases que mejoren la resolución tiempo-frecuencia. Esto da origen a lo que se conoce como la transformada de ondículas. Por otra parte, en años recientes la necesidad de encontrar métodos que hagan más eficiente el almacenamiento y transmisión de información, ha impulsado el estudio de los bancos de filtros de reconstrucción perfecta. Este artículo introduce los conceptos básicos de la transformada de ondículas y de la teoría de bancos de filtros de reconstrucción perfecta para finalmente establecer la relación entre las dos herramientas. Esto conduce a un método para realizar la transformada ondícula basado en el diseño de filtros que permiten separar las señales en bandas de la mejor forma posible.

Palabras clave: Ondículas, filtros, multiresolución.

Introducción

Generalmente para analizar fenómenos físicos, uno se basa en las señales que ellos producen. El dominio natural de la señal es el tiempo. Sin embargo, para visualizar atributos particulares o para realizar procesos de una manera más simple, desde el siglo pasado se ha intentado transformar la señal y llevarla a otros dominios como por ejemplo la frecuencia. El primero de estos intentos corresponde al trabajo de Fourier. La transformada de Fourier permite representar una señal en función de bases sinusoidales ilimitadas en tiempo y esto la convierte en una herramienta natural para el análisis de señales estacionarias. La transformada de ondículas o transformada ondículas como la llamaremos, es la representación de una señal en función de unas bases más apropiadas para señales no estacionarias que las exponenciales complejas de Fourier, produciendo un mejor compromiso entre la resolución temporal y frecuencial; de hecho esta transformada fué introducida por Morlet [1] para analizar señales sísmicas. Algunas de sus aplicaciones son las siguientes: Compresión de señales e imágenes [2, 3], análisis del electroencefalograma [4], detección de picth [5], compresión de imágenes de huellas dactilares [6], detección de cambios en estructuras y señales [7], detección de ondas sísmicas [8], filtraje de potenciales evocados [9], cancelación de ecos [10], reflectometría óptica [11], etc.

Por otra parte, la gran cantidad de información proveniente de todas las áreas del conocimiento, ha forzado la búsqueda de sistemas de compresión de datos para hacer más eficiente su transmisión y almacenamiento. Esto estimuló el estudio de bancos de filtros para separación de bandas como un paso previo a cualquier procesamiento de la señal [12, 13, 14].

Comenzando con el análisis tradicional de Fourier, se presenta la transformada ondículas, la teoría de bancos de filtros y su relación. Se incluye una aplicación de la transformada ondícula discreta realizada con bancos de filtros sobre señales sísmicas, con el propósito de localizar epicentros de terremotos, a través de la detección de las ondas P y S que constituyen el sismograma.

Transformada Ondículas

De Fourier a ondículas

La teoría de las series de Fourier ha sido importante en síntesis y análisis de redes porque permite aproximar una función arbitraria sobre un intervalo de tiempo dado, con la suma de otras señales más convenientes de tratar y visualizar.

Suponga que queremos aproximar una señal $x(t)$ en función de un número arbitrario de k señales $g_n(t)$ en un intervalo (t_1, t_2) [15]:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=1}^k C_n g_n(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (1)$$

El criterio más usado para determinar el valor óptimo de C_n es minimizar el promedio del cuadrado del error, entre la señal y el estimado, en el intervalo (t_1, t_2) . Cuando las funciones g_n son ortogonales entre sí, los coeficientes óptimos resultan:

$$C_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_n^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_n(t) g_n^*(t) dt} \quad (2)$$

Como se observa el coeficiente C_n se calcula proyectando, en forma **normalizada**, la función $x(t)$ sobre la función base $g_n(t)$.

En el área de eléctrica y electrónica se acostumbra utilizar como bases $g_n(t)$ a exponenciales complejas (sinusoides) infinitas debido, entre otras cosas, a que nuestros sistemas responden de manera natural con exponenciales complejas que son funciones fáciles de sintetizar y manejar. Sin embargo el análisis tradicional de Fourier no es útil cuando la señal a analizar carece de una regularidad estadística determinada o cuando tiene variaciones locales de la frecuencia. Se piensa entonces que si se escogen porciones de la señal o, lo que es lo mismo, se hacen pasar los datos por una ventana previa al cálculo de la transformada de Fourier, es posible obtener la localización en tiempo de cada componente frecuencial. Esto representa observar la señal $x(t)$ a través de la ventana $w(t)$ trasladada hasta el tiempo τ , que es lo que hace la Transformada de Fourier de corto plazo o STFT (Short Time Fourier Transform)[16] de la señal $x(t)$, es decir:

$$STFT_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)w^*(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3)$$

$$d\tau = e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} X(f')W^*(f' - f)e^{j2\pi f't} df'$$

Se puede ver a la STFT como la proyección de la señal $x(t)$ sobre una función base sinusoidal limitada temporalmente a través de una ventana fija $w(t)$ y, debido a que la operación es invertible, esto al mismo tiempo equivale a representar la señal $x(t)$ a través de una familia de funciones bases del tipo: $w^*(\tau - t) e^{j\omega\tau}$. Otra forma de verlo es como un filtraje de la señal $x(t)$ con un filtro pasabanda de ancho de banda constante trasladado a las diferentes frecuencias de análisis. Una vez elegida la ventana $w(t)$, la resolución para todo el plano t - f estará fija. Por lo tanto para una STFT dada podemos aumentar la resolución temporal con funciones más estrechas en tiempo con lo que estaremos perdiendo resolución en frecuencia ya que los filtros se hacen más anchos. El mejor intento fue el de Gabor [16] quien propuso el uso de una ventana con envolvente gausseana lográndose una buena resolución en el dominio t - f . Pero aún así se sigue dependiendo del tamaño de la ventana elegida. Se piensa entonces en representar la función con otro tipo de bases que traten en lo posible de mejorar la resolución adaptándola al rango de frecuencias analizado. Esto se define como la transformada continua de ondículas.

Transformada continua de ondículas

La transformada continua de ondículas de una señal $x(t)$ se define como [6]:

$$CWT(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w_{ab}^*(t) dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (4)$$

o calculándola en base a la representación espectral de la señal y de la base:

$$CWT(a, b) = \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)W^*(a\omega)e^{jb\omega} d\omega \quad (5)$$

Observe que, al igual que en Fourier, se está realizando un producto escalar de la señal $x(t)$ con una función que llamaremos $w_{ab}(t)$ que se genera trasladando, escalando y normalizando la energía de una onda madre llamada $w(t)$. Es decir, a una escala a y un desplazamiento b dados,

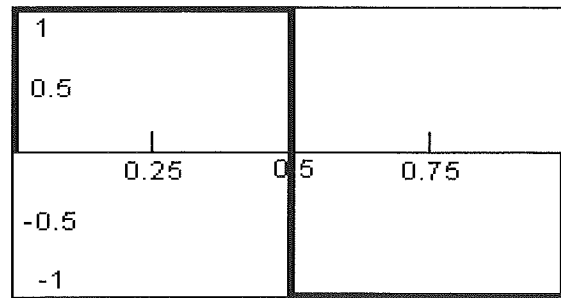


Figura 1. Ondícula Haar.

uno sustituye la señal por la mejor aproximación posible a dicha escala [17]. Para que la relación sea invertible, es decir para que se pueda recuperar la señal $x(t)$ a partir de las proyecciones sobre las bases seleccionadas, la onda madre $w(t)$ debe cumplir la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|W(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (6)$$

Esto obliga a la señal a ser de energía finita, pasabanda y oscilatoria. En este caso la señal $x(t)$ puede ser recuperada mediante la transformada ondícula inversa, ICWT, definida a través de una constante de proporcionalidad C_g como:

$$x(t) = C_g \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} CWT_x(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} w\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dbda}{a^2} \quad (7)$$

Una ondícula sencilla es la Ondícula Haar que se observa en la Figura 1.

Al variar a y b se obtienen, por ejemplo, las señales escaladas y trasladadas que se muestran en la Figura 2.

Esta base puede no ser apropiada para representar señales con cambios suaves. Ingrid Daubechies [18] desarrolló una familia de ondículas madre que han tenido mucha aceptación en diversas aplicaciones. En la Figura 3 puede observarse una de ellas.

En la transformada ondícula, aparece en vez de la frecuencia f una variable asociada a que llamaremos escala. Esta variable está relacionada inversamente con la frecuencia. Su papel será el siguiente: Para a grande (suponga $a > 1$) la función $w(t)$ se amplía en tiempo; al multiplicar la señal $x(t)$ por algo más amplio en tiempo (bajas frecuencias) que corresponde a algo más estrecho en frecuencia se obtendrá mayor resolución en frecuencia. Para a pequeño el análisis se invierte:

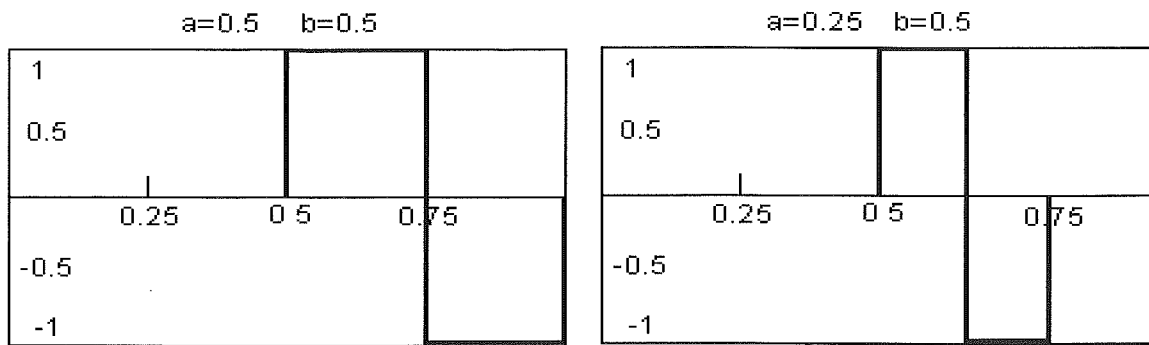


Figura 2. Ondícula Haar trasladada y escalada.

Una ventana estrecha en tiempo implica una menor resolución en frecuencia. Observe, en la Figura 4, la CWT de un pulso rectangular que existe entre -5 segundos y 5 segundos, usando la siguiente ondícula madre tipo Morlet:

$$w(t) = e^{-(16t)^2} e^{j16\pi t}$$

Como se observa, la escala temporal asociada al desplazamiento b barre entre -5 y 5, mientras la escala a varía entre 0 y 7. Para los valores de escala a más bajos se aprecia gran resolución temporal y por esto se ubican perfectamente las transiciones del pulso rectangular. Lo inverso

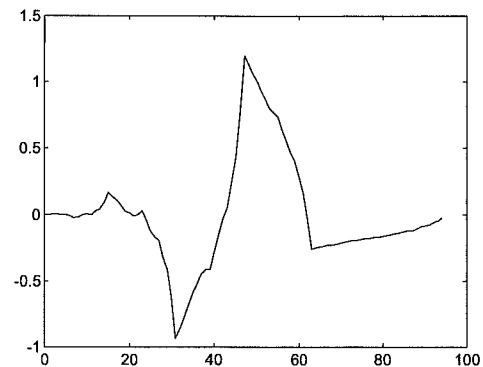


Figura 3. Ondícula Daubechie-4.

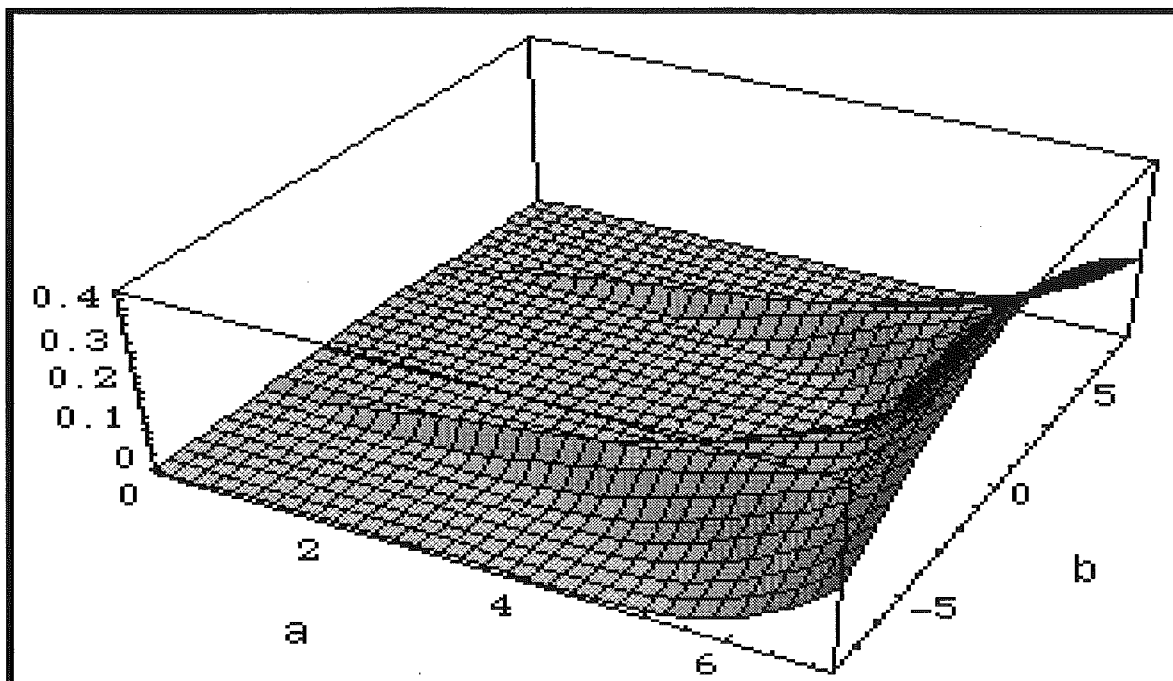


Figura 4. CWT de un pulso rectangular.

ocurre a valores de escala a grandes donde se pierde la resolución temporal.

Transformada discreta de ondículas

Un problema de la transformada continua de ondículas es que los coeficientes no son independientes uno de otro, produciendo una descomposición de la señal redundante y no ortogonal [19]. Meyer [17] propone discretizar a y b, de forma de obtener una base ortogonal, de la siguiente manera: $a=a_0^j$ y $b=ka_0^j T$ donde las variables j y kT discretas sustituirán a las variables a y b del análisis continuo. Observe que, de manera lógica, se ha discretizado b en proporción a la discretización de a. El problema entonces se reduce a escoger a_0, T y $w(t)$ tal que se cumpla la fórmula de reconstrucción en su versión discreta. Es decir se debe poder recuperar la señal $x(t)$ calculando la sumatoria de las ondículas pesadas por los respectivos coeficientes. Si la redundancia es alta (pasos pequeños de a) casi no hay restricciones sobre $w(t)$ respecto a la invertibilidad de la transformada (señal limitada en tiempo, pasabanda y oscilatoria); por otra parte si el paso es grueso, crecen las restricciones sobre $w(t)$.

Si se escoge $a_0=2$ (primer entero mayor que la unidad), la escala estará asociada con una división en octavas. Con este valor, la representación de la transformada de la señal en el dominio de la frecuencia produce unos coeficientes dados por la antitransformada (F^{-1}) de Fourier escalada del producto de la señal en frecuencia $X(f)$ por la

respuesta en frecuencia de un banco de filtros en octavas $W(2^j f)$, evaluada en los puntos $2^j k$:

$$WT_{j,k} = 2^{j/2} F^{-1} [X(f)W^*(2^j f)]_{(2^j k)} \tag{8}$$

Esta ecuación proviene de la discretización de la ecuación (5) utilizando $a=2^j$ y $b=k2^j$. Como la ondícula tiene la peculiaridad de ser pasabanda, dichos filtros son pasabandas escalados en frecuencia. Esto puede conseguirse con un esquema de filtraje que combine filtros pasabajo y pasaalto de manera de ir cubriendo el espectro y cambiando la resolución de la representación. Observe el esquema mostrado en la Figura 5. Si se supone que el filtro pasaalto $H(\omega)$ es ideal (Unitario entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, con período 2π) y de manera similar el pasabajo $L(\omega)$, (Unitario entre $-\pi/2$ y $\pi/2$), se puede observar, en la Figura 6, la respuesta en frecuencia total en los puntos **1, 2 y 3**

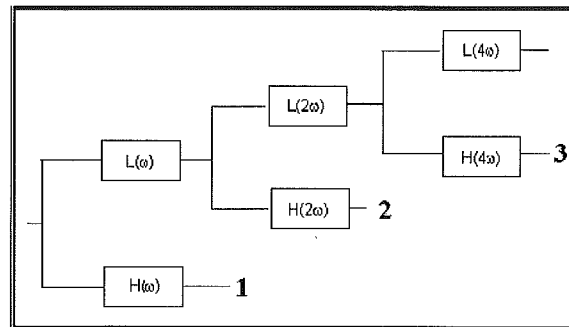


Figura 5. Esquema de filtraje para lograr descomposición en ondículas.

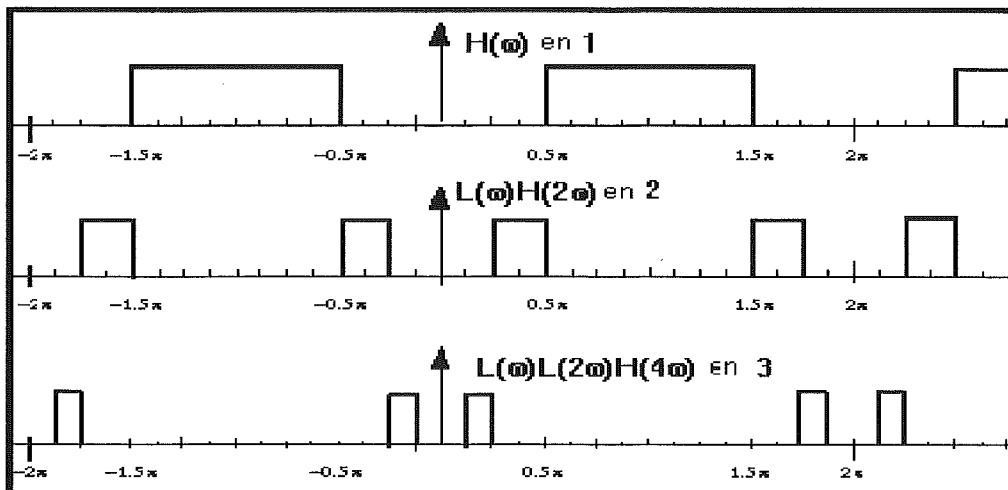


Figura 6. Respuesta en frecuencia de los puntos **1, 2, 3**.

las cuales corresponden a selecciones en frecuencia en octavas. La respuesta en frecuencia en el punto 2 se obtiene multiplicando $L(\omega) \cdot H(2\omega)$; la primera es unitaria entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ mientras que $H(2\omega)$ es una versión comprimida de $H(\omega)$ por lo tanto es unitaria entre $\pi/4$ y $3\pi/4$; el producto $L(\omega) \cdot H(2\omega)$ sólo será no nulo entre $\pi/4$ y $\pi/2$. Esto es similar a lo que se realiza al descomponer una señal en función de una ondícula madre y traslaciones y escalamientos de la misma. Debido a esta relación entre transformada de ondículas y filtros, a continuación se revisa la teoría de bancos de filtros de reconstrucción perfecta.

Bancos de filtros

Bancos de filtros de reconstrucción perfecta de dos canales

La gran cantidad de información proveniente de todas las áreas del conocimiento, ha forzado la búsqueda de sistemas de compresión de datos para hacer más eficiente su transmisión y almacenamiento. Por otra parte se ha descubierto que algunos sistemas físicos, por ejemplo el oído y la visión, analizan la información de manera diferente dependiendo de la banda de frecuencia donde se encuentre. Esto estimuló el estudio de bancos de filtros para separación de bandas como un paso previo al procesamiento de la señal [12].

Un banco de filtros de dos canales tiene la estructura mostrada en la Figura 7. Esteban y Galand [13] presentaron un diseño, llamado

QMF (Quadrature Mirror Filters) que permite hacer la división en dos bandas: una pasabajo y otra pasabajo, submuestrear estas dos bandas y luego recuperar la señal original utilizando filtros apropiados. El propósito es separar en bandas sin aumentar el número de muestras a procesar. El esquema básico es el siguiente:

En la Figura 7, $x(n)$ es la señal de entrada, $H_L(e^{j\omega})$, $F_L(e^{j\omega})$, $H_H(e^{j\omega})$ y $F_H(e^{j\omega})$ son filtros que consideraremos FIR (Finite Impulse Response) y causales. $H_L(e^{j\omega})$ y $H_H(e^{j\omega})$ serán filtros pasabajo y pasabajo respectivamente. Los bloques denotados como $\downarrow 2$ y $\uparrow 2$ son compresores y expansores temporales respectivamente.

El compresor por 2 toma una de cada dos muestras de la señal de entrada (compresión en tiempo) lo que representa una expansión en frecuencia. Si relacionamos las transformadas de Fourier de entrada $W(\omega)$ y salida $Z(\omega) = 0.5 W(0.5\omega) + 0.5 W(0.5\omega + \pi)$.

Por otra parte, el expansor temporal intercala un cero después de cada muestra de la señal de entrada. Esto produce compresión frecuencial. Si relacionamos las transformadas de Fourier de entrada $W(\omega)$ y salida $Z(\omega)$ tendremos $Z(\omega) = W(2\omega)$.

En el banco de filtros, la señal es pasada por dos ramas cada una de las cuales tiene un diez-mador (filtro más compresor) seguido de un interpolador (expansor más filtro).

La Figura 8 nos permitirá comprender mejor el paso de la señal por el sistema asumiendo una señal de entrada adecuadamente muestrea-

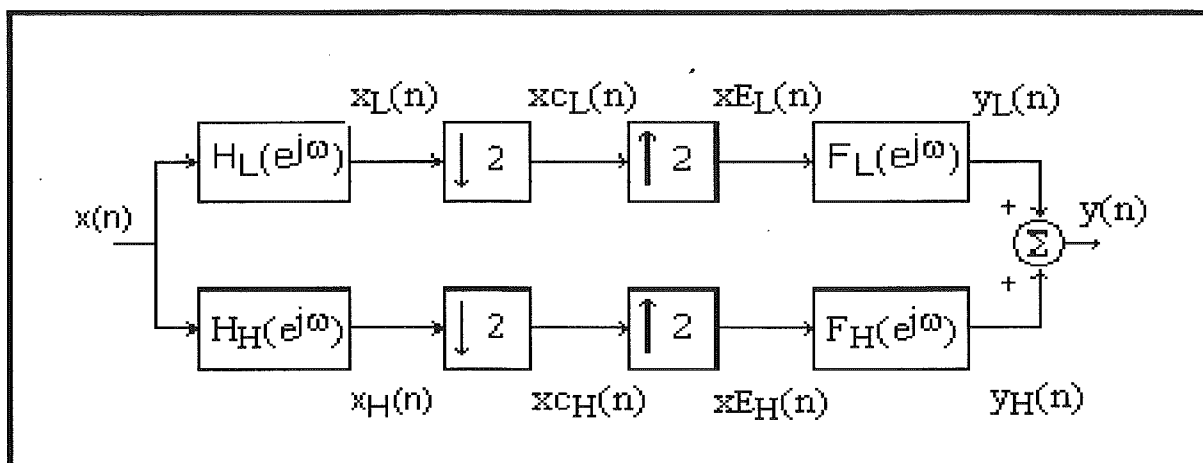


Figura 7. Banco de filtros de 2 canales.

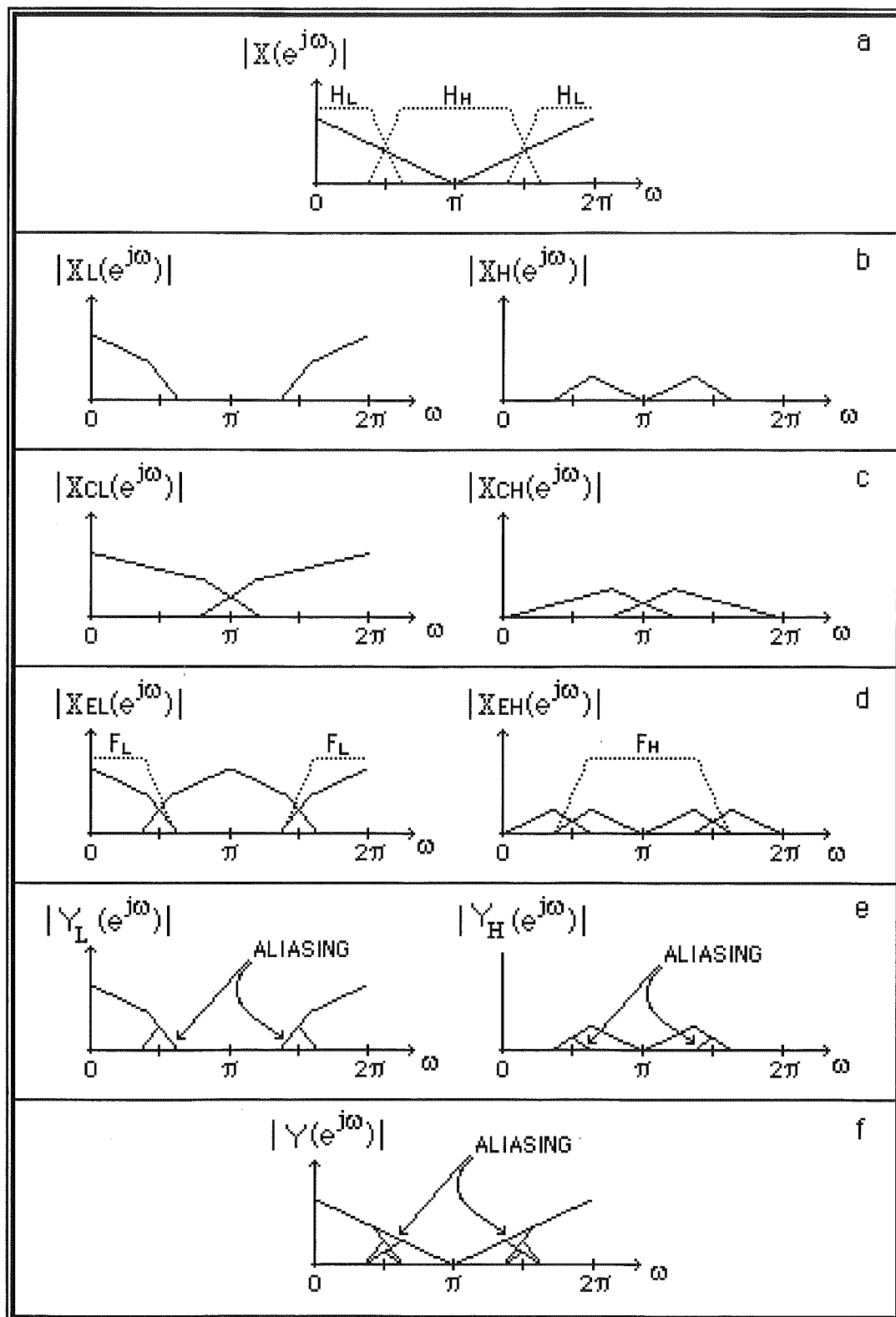


Figura 8. Análisis espectral del banco de filtros.

da con un espectro triangular, asumiendo que H_L y F_L son filtros pasabajo y que H_H y F_H son filtros pasaalto (sus relaciones se encontrarán a continuación). Al pasar por los filtros $H_L(e^{j\omega})$ y $H_H(e^{j\omega})$ (Figura 8 b) se obtiene:

$$X_L(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H_L(e^{j\omega}) \quad (9)$$

$$X_H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H_H(e^{j\omega}) \quad (10)$$

Luego se comprimen en tiempo (expansión en frecuencia) cada una de las señales por un factor de 2 para obtener las señales $x_{cL}[n]$ y $x_{cH}[n]$ (Figura 8 c). Sus espectros serán:

$$X_{cL}(e^{j\omega}) = 1/2 [X_L(e^{j\omega/2}) + X_L(e^{j(\omega+2\pi)/2})] \quad (11)$$

$$X_{cH}(e^{j\omega}) = 1/2 [X_H(e^{j\omega/2}) + X_H(e^{j(\omega+2\pi)/2})] \quad (12)$$

Al interpolar cada una de las sub-bandas (Figura 8 d y e) y sumar los espectros de salida, se obtiene

$$Y(e^{j\omega}) = Y_L(e^{j\omega}) + Y_H(e^{j\omega}) = 1/2 X(e^{j\omega})$$

$$[H_L(e^{j\omega}) F_L(e^{j\omega}) + H_H(e^{j\omega}) F_H(e^{j\omega})] +$$

$$1/2 X(e^{j(\omega+\pi)}) [H_L(e^{j(\omega+\pi)}) F_L(e^{j\omega}) +$$

$$H_H(e^{j(\omega+\pi)}) F_H(e^{j\omega})] \quad (13)$$

Se puede observar que el espectro de la señal recuperada $Y(e^{j\omega})$ (Figura 8 f) está compuesto por dos términos: el primero está asociado a la señal original y el segundo a las componentes de solapamiento generadas durante el proceso de compresión. Para lograr reconstrucción perfecta, se debe cumplir que:

$$Y(e^{j\omega}) = k X(e^{j\omega}) e^{-j\omega r} \quad \text{ó} \quad y(n) = k x(n-r) \quad (14)$$

Es decir la señal reconstruida será una réplica de la señal de entrada escalada y retardada en tiempo. Esto arroja las siguientes condiciones:

$$[H_L(e^{j(\omega+\pi)}) F_L(e^{j\omega}) + H_H(e^{j(\omega+\pi)}) F_H(e^{j\omega})] = 0 \quad (15)$$

$$1/2 [H_L(e^{j\omega}) F_L(e^{j\omega}) + H_H(e^{j\omega}) F_H(e^{j\omega})] = e^{-j\omega r} \quad (16)$$

La primera restricción garantiza la cancelación de las componentes de solapamiento. La segunda representa reconstrucción perfecta (distorsión de fase nula y distorsión de amplitud nula) de la señal de entrada.

La ecuación de no superposición se satisface si, por ejemplo:

$$F_L(e^{j\omega}) = H_H(e^{j(\omega+\pi)}) \quad \text{y} \quad F_H(e^{j\omega}) = -H_L(e^{j(\omega+\pi)}) \quad (17)$$

Al colocar estas relaciones en la condición de reconstrucción perfecta esta ecuación quedaría

$$[H_L(e^{j\omega}) F_L(e^{j\omega}) - F_L(e^{j(\omega+\pi)}) H_L(e^{j(\omega+\pi)})] = 2 e^{-j\omega r} \quad (18)$$

o en el dominio de la transformada Z

$$[H_L(z) F_L(z) - F_L(-z) H_L(-z)] = 2 z^{-r} \quad (19)$$

Si llamamos $H_L(z) F_L(z) = P_0(z)$, la ecuación a resolver sería:

$$P_0(z) - P_0(-z) = 2 z^{-r} \quad (20)$$

Una vez elegido $P_0(z)$ habría que factorizarlo para determinar $H_L(z)$ y $F_L(z)$ y por ende se podrían deducir $H_H(z)$ y $F_H(z)$.

El análisis de la ecuación (20) permite observar lo siguiente:

a) $P_0(z)$ tiene que ser un filtro cuya respuesta impulsiva es del tipo mostrado en la Figura 9 ('halfband filter'); es decir, debe tener los coeficientes de las potencias impares nulos. Debido a que se supusieron filtros FIR, los coeficientes de $p_0(n)$ corresponden a los coeficientes de $P_0(z)$; por lo tanto, para que $P_0(z) - P_0(-z) = 2 z^{-r}$ excepto en el centro (r =entero impar), los coeficientes impares tienen que ser nulos ya que los pares se cancelan ($(z)^k = (-z)^k$ si k es par)[6].

b) Se ha demostrado que la regularidad de los filtros tiene relación con el número de ceros que tenga el polinomio en π [6]. Los ceros en π tienden a aplanar la banda pasante y por simetría la no pasante. Daubechies propuso la construcción de una familia de filtros basado en la siguiente expresión:

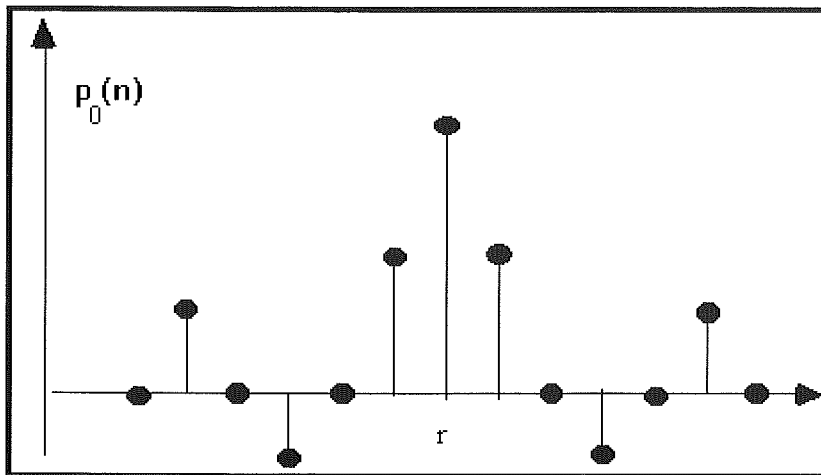


Figura 9. Filtro $p_0(n)$.

$$P_0(z) = (1 + z^{-1})^{2p} Q(z) \tag{21}$$

donde $Q(z)$ es un polinomio necesario para lograr que el polinomio $P_0(z)$ tenga las características descritas anteriormente para cumplir $P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-r}$. Se observa que tiene $2p$ ceros en π .

c) Una vez construido $P_0(z)$, hay que factorizar para lograr el diseño de $H_L(z)$, $F_L(z)$ y por ende de $H_H(z)$, $F_H(z)$. Existe una opción que es escoger los cuatro filtros como versiones moduladas de un filtro pasabajo prototipo $h(n)$. Haciendo esta consideración tendríamos que $h_L[n]$, $h_H[n]$, $f_L[n]$ y $f_H[n]$, quedarían definidas en función de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del filtro prototipo $h[n]$. Apliquemos esto al caso más simple: Haar que es un caso particular de Daubechies con $Q(z)=0.5$ y $p=1$.

$$P_0(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1})^2 \tag{22}$$

$$H_L(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z^{-1})$$

Podemos definir $H_L(e^{j\omega})$ como el filtro prototipo $H(e^{j\omega})$, y en base a él definir los 4 filtros de la siguiente manera:

$$H_L(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}), \quad H_H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)}), \\ F_L(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \text{ y } F_H(e^{j\omega}) = -H(e^{j(\omega+\pi)}).$$

El esquema total, aplicando las condiciones respecto al filtro prototipo, quedaría como puede verse en la Figura 10.

En cada filtro se han colocado los 2 coeficientes de su respuesta impulsiva discreta. Ob-

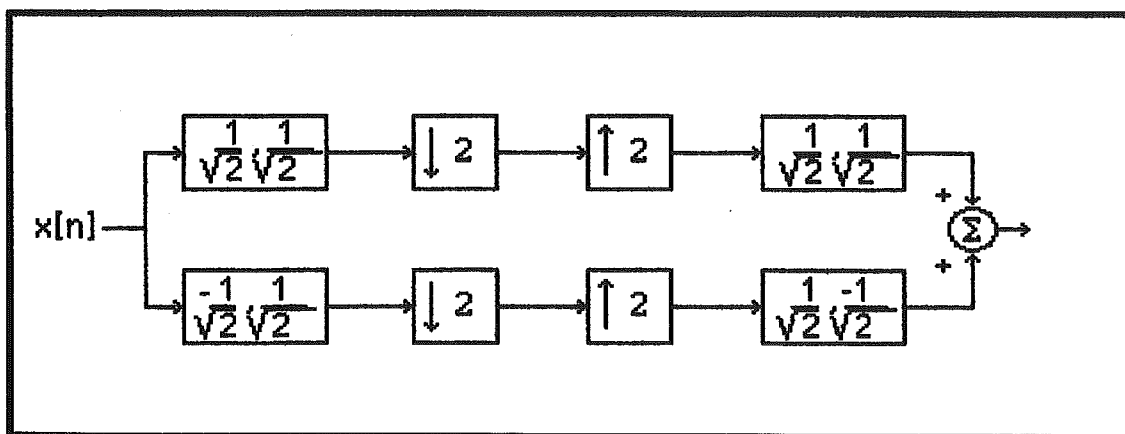


Figura 10. Banco de filtros Haar.

serve que el filtro pasabajo de entrada es un promediador mientras que el filtro pasaalto toma las diferencias y por lo tanto da los detalles.

En un caso más general se reparten los polos de $P(z)$ entre $H(z)$ y $F(z)$ tomando ciertas consideraciones, como por ejemplo: Para obtener fase lineal y coeficientes reales, por cada cero se necesita su complejo conjugado y su inverso. Para ceros en el eje real sólo se necesita su inverso. Para ceros en el círculo unitario sólo se necesita su complejo conjugado.

Este procedimiento puede no ser el más conveniente si el orden es muy elevado. En ese caso existen otras técnicas de diseño de factorización espectral [20] que serán más convenientes. Si uno quiere aumentar el número de bandas de análisis puede usar estructuras en árbol binario. Esto consiste en varias etapas QMF conectadas jerárquicamente de manera que cada banda puede ser descompuesta y reconstruida por otro bloque QMF. La gran ventaja de este tipo de banco de filtros es su simplicidad. Además cumplen con la condición de reconstrucción perfecta, pues dado que sus unidades estructurales son sistemas de reconstrucción perfecta, el sistema

en su totalidad también lo es. Sin embargo, se trata de un diseño subóptimo y los retardos introducidos por un sistema de este tipo, los cuales aumentan significativamente con cada etapa, son generalmente muy grandes en comparación con otros tipos de bancos de filtros.

Bancos de filtros y su relación con la descomposición en ondículas

En vez de separar la señal en bandas uniformes, se puede intentar separación en bandas no uniformes. La más simple y común es la estructura de bancos de filtros en octavas mostrada en la Figura 11.

Para lograr reconstrucción perfecta se necesitaría un esquema que fuese, gráficamente, la reflexión especular de la Figura 11. Aquí podemos encontrar la primera relación con la representación de una señal en base a ondículas ya que, haciendo uso de las llamadas identidades nobles [13], que se muestran en la Figura 12 ($E(z)$ y $E(z^2)$ son respuestas en frecuencia genéricas), podemos modificar cada rama y convertir el esquema mostrado en algo similar a la transformada ondícula como se observa en la Figura 13.

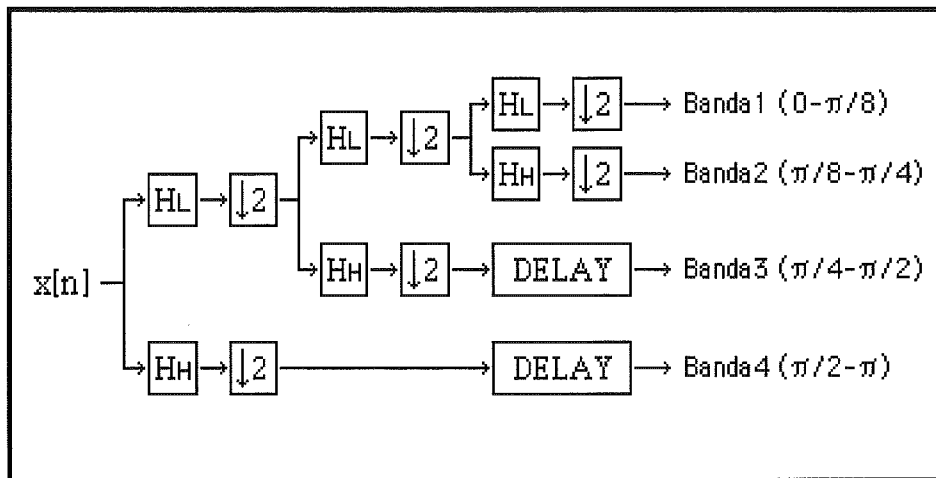


Figura 11. Banco de filtros en octavas.

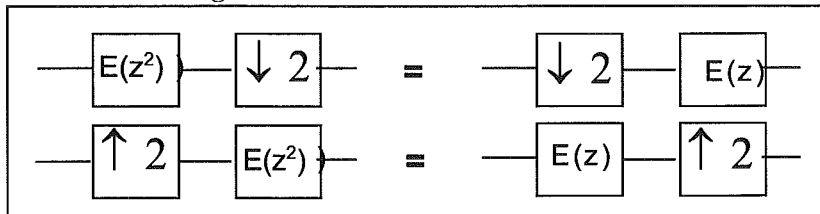


Figura 12. Identidades Nobles.

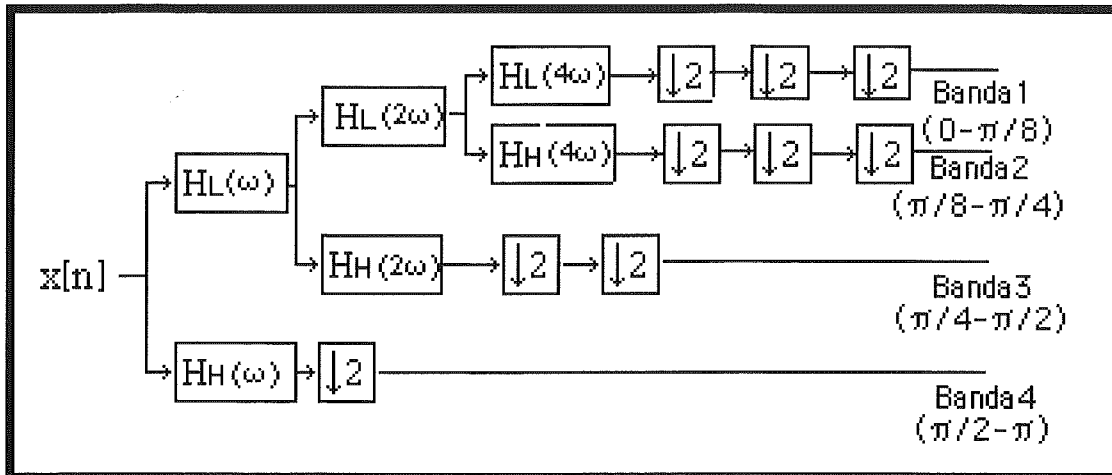


Figura 13. Banco de filtros y descomposición en ondículas.

Si se compara la Figura 13 con la Figura 5, con $H_L=L$ y $H_H=H$, la diferencia radica en los compresores temporales a la salida que son los que garantizarán que el número de muestras total a la entrada y a la salida sea constante. De resto la descomposición lograda es idéntica.

Hasta este punto sabríamos realizar una transformada ondícula discreta usando un banco de filtros de reconstrucción perfecta. Pero debemos aclarar que relación tienen las respuestas impulsivas de los filtros pasabajo y pasaalto de dichos bancos con la ondícula propiamente dicha. Presentaremos el concepto de multiresolución original de Mallat [2], para lograr este propósito.

Suponga que se tiene una función $\phi(t)$ llamada función de escalamiento. Se define el espacio V_N a aquel que contiene a $\phi(t)$ y a todos sus desplazamientos $V_N = \{\phi(t), \phi(t-n)\}$. De la misma forma se define el espacio $V_{N-1} = \{\phi(2t), \phi(2t-n)\}$. Este espacio tiene más resolución temporal que V_N , por lo tanto se puede representar $\phi(t)$ en función de $\phi(2t)$ a través de la llamada ecuación de escalamiento, que es la siguiente:

$$\phi(t) = \sum C_n \phi(2t-n) \tag{23}$$

Pero si en tiempo se tiene una función de $2t$ (Compresión temporal) en frecuencia esto es una función de $\omega/2$ (Expansión frecuencial). Teniendo V_N , se necesita una función que llamaremos el detalle W_N que permitirá construir el espacio

V_{N-1} . Definamos ahora la ecuación de ondícula (o detalles) como:

$$w(t) = \sum D_n \phi(2t-n) \tag{24}$$

Esto permite expresar con la siguiente ecuación la relación entre los espacios $V_N + W_N = V_{N-1}$. Haciendo el símil con lo que definido en un banco de filtros, V_k son respuestas pasabajo y W_k son respuestas pasabandas (nos recuerda la ondícula) (Figura 14). H y L representan filtros ideales pasaalto y pasabajo respectivamente. Por ejemplo el primer filtraje H toma la parte de alta frecuencia de V_0 y produce W_1 , mientras que el primer filtro L toma la parte de bajas frecuencias de V_0 y produce V_1 y así el resto.

Observe que con V_2 y W_2 se construye V_1 y así sucesivamente. Se demuestra [21] que si uno iguala los coeficientes de las ecuaciones (23) y (24) a los de las respuestas impulsivas de los filtros pasabajo y pasaalto del banco de filtros respectivamente, se encuentra que la función de escalamiento puede ser vista como la multiplicación infinita de la respuesta en frecuencia H_L de un filtro pasabajo y sus versiones escaladas. La función de escalamiento por tanto es una función pasabajo. Haciendo un tratamiento similar con la ecuación de ondícula, se obtiene que la ondícula resulta de iterar el filtro pasabajo muchas veces y finalmente pasar por el filtro pasaalto escalado a 2. La relación final entre la ondícula y las respuestas impulsivas de los filtros del banco asimétrico es $W(\omega) = H_H(\frac{\omega}{2}) \prod_{j=1}^{\infty} H_L(\frac{\omega}{2^j})$.

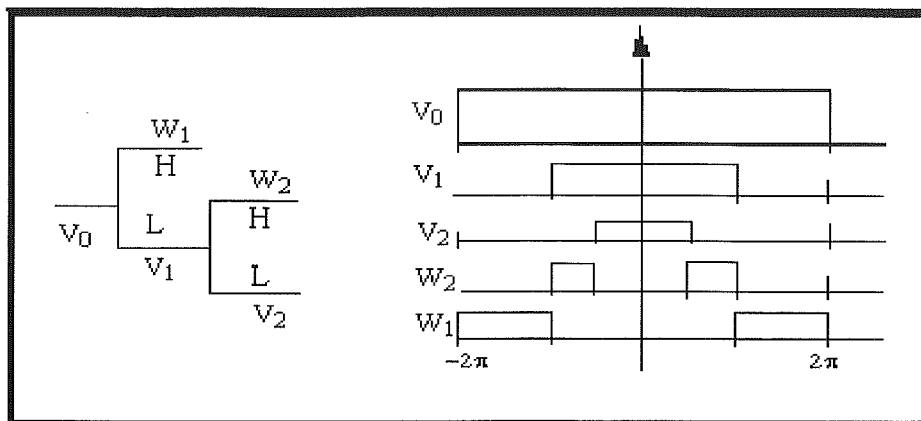


Figura 14. Relación entre bancos de filtros y multiresolución.

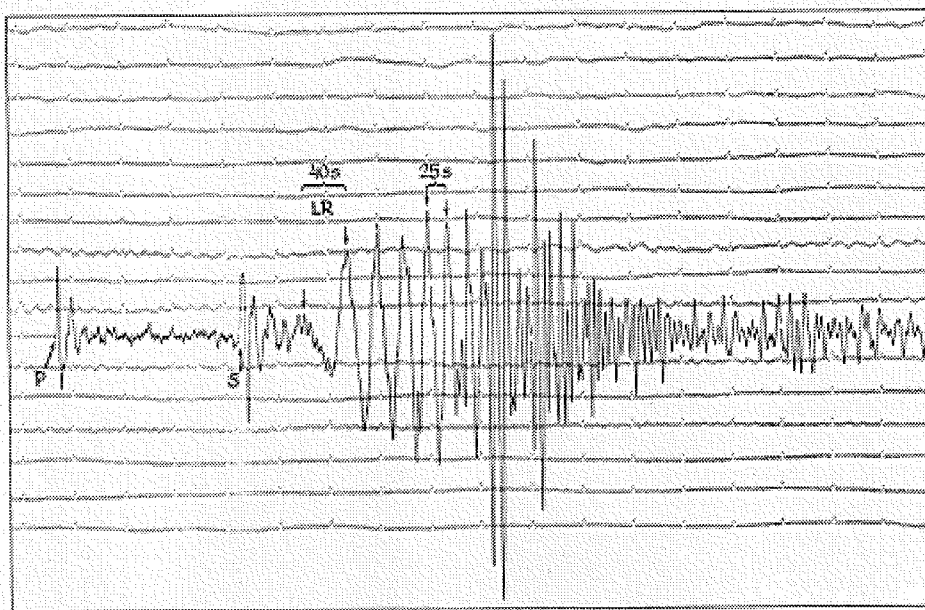


Figura 15. Sismograma típico.

Ejemplo de Aplicación: Detección de Ondas Sísmicas

Los terremotos son fenómenos físicos cuyos dramáticos efectos han llevado al hombre a interesarse por su estudio. Existen sólo tres tipos básicos de ondas sísmicas que producen la sacudida que se siente y causa daños en un terremoto. De los tres tipos únicamente dos se propagan en el interior de la Tierra. La más rápida de estas ondas internas es llamada apropiadamente primaria u onda P [22, 23], con velocidades de 5,4 a 13,8 km/seg y contenido de frecuencia entre 0,1 y 5 Hz. La onda interna más lenta es llamada se-

cundaria u onda S [22, 23], con velocidades entre 3,2 y 7,2 km/seg y frecuencias por el orden de 2 a 3 Hz. El sismograma es el registro formado por la combinación de todas las ondas que llegan al sismógrafo. Un ejemplo se observa en la Figura 15.

Una de las características de mayor interés es la ubicación del epicentro o foco superficial del sismo, para lo cual se requiere de la detección, en el sismograma, de la onda P y la onda S. Al tener los tiempos de llegada de las ondas P y S de tres estaciones se puede calcular, por triangulación, el epicentro del terremoto o sismo [24]. La búsqueda de un algoritmo automático y preciso para la detección de las ondas P y S sigue siendo un

problema sin solución. Los resultados de numerosos estudios indican que el análisis en el dominio temporal, basado en muchos casos en la observación de un analista experimentado, no resulta el más adecuado y que el dominio frecuencial podría proporcionar mayores aportes. En 1992 se planteó la factibilidad del uso de la transformada ondícula, inicialmente sólo para la representación del sismograma en el computador [25], más tarde para la caracterización de la traza sísmica [26] y finalmente para la detección. El estudio de las señales sísmicas usando la transformada ondícula se ha inclinado hacia la detección del evento usando tres componentes del sismograma de una estación [27-29]. Sin embargo la mayoría de las estaciones alrededor del mundo no poseen tres sismógrafos para registrar las tres componentes mencionadas, sino que se limitan a registrar una sola componente.

El objetivo de la aplicación que a continuación se describe, es aplicar la transformada ondícula discreta sobre la componente vertical del sismograma, usando un banco de filtros, para detectar de manera automática las ondas P y S.

Para los experimentos se usaron 378 señales, muestreadas a 100 Hz, provenientes de FUNVISIS (Fundación Venezolana de Investigaciones Sismológicas). Se procedió a clasificar los registros basándose en: la amplitud de la señal, la distancia entre la onda P y la onda S, la intensidad

del ruido y en el cambio del comportamiento temporal de la señal. Se definieron 10 tipos de señal: Los primeros cinco tipos se caracterizan por ser "poco ruidosas", es decir el ruido no afecta significativamente la apreciación de las ondas P y S, mientras que en los últimos cinco tipos de señales, el ruido si es un ingrediente importante para los criterios de clasificación, por lo que se les denominaron trazas "sucias". Las ondículas seleccionadas fueron: Haar, Daubechies (orden 4 y 12), Coiflet (orden 1 y 2) y Vetterli (orden 18 y 22); con esta selección a mano se procedió a obtener los filtros de análisis correspondientes a cada una de ellas; posteriormente se realizó la transformada ondícula discreta de cada registro, basándose en bancos de filtros, utilizando el paquete UVI-WAVE 3.00, elaborado en 1996 en la Universidad de Vigo, España, ejecutable bajo Matlab. Se seleccionó una descomposición de profundidad 4, usando como referencia trabajos previos que buscan limitar el tiempo de cálculo [8]. El diagrama empleado se presenta en la Figura 16 donde H representa el filtro pasaalto y L el filtro pasabajo.

Se realizaron pruebas iniciales de validación sobre señales poco ruidosas. De estas pruebas surgieron como convenientes las ondículas Haar y Daubechies-4. Al procesar señales ruidosas se obtuvieron mejores resultados para la ondícula Haar hecho que era sospechado debido a

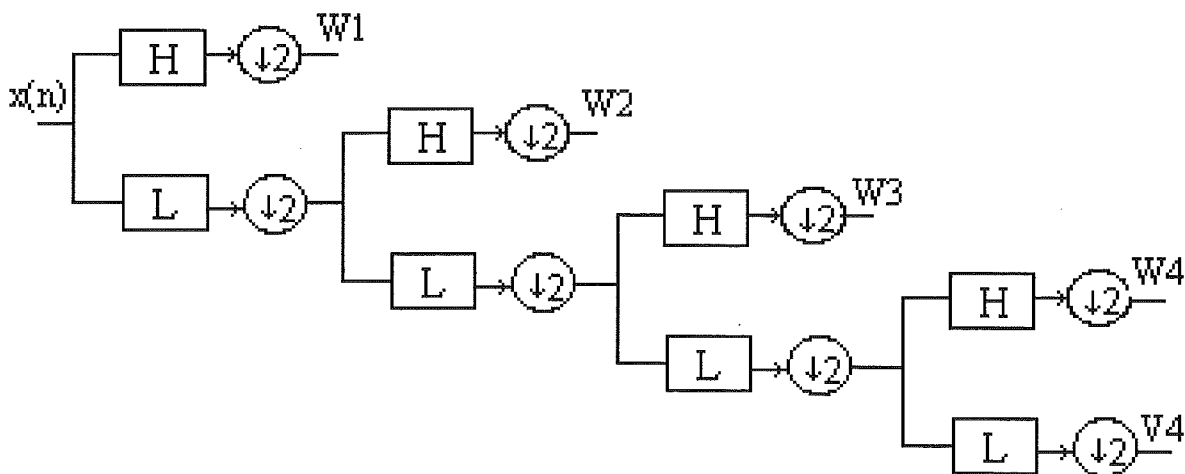


Figura 16. Diagrama en bloques del banco de filtros utilizado para obtener la descomposición con transformada ondícula.

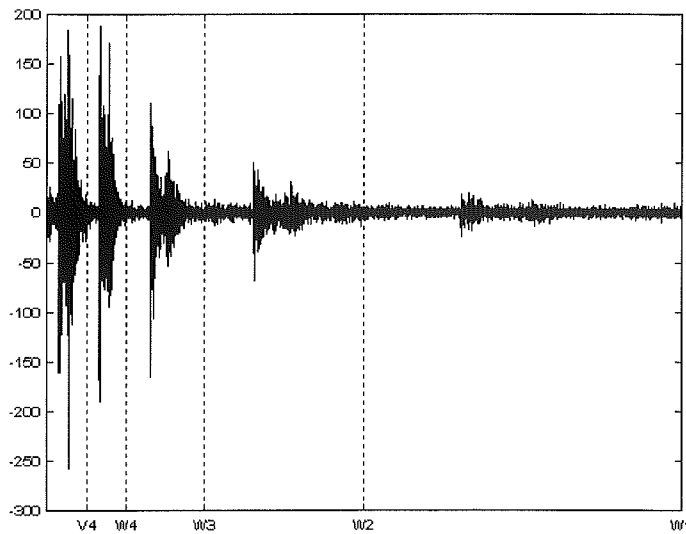


Figura 17. Resultado de la transformada ondícula de la traza 5206 utilizando ondícula Haar.

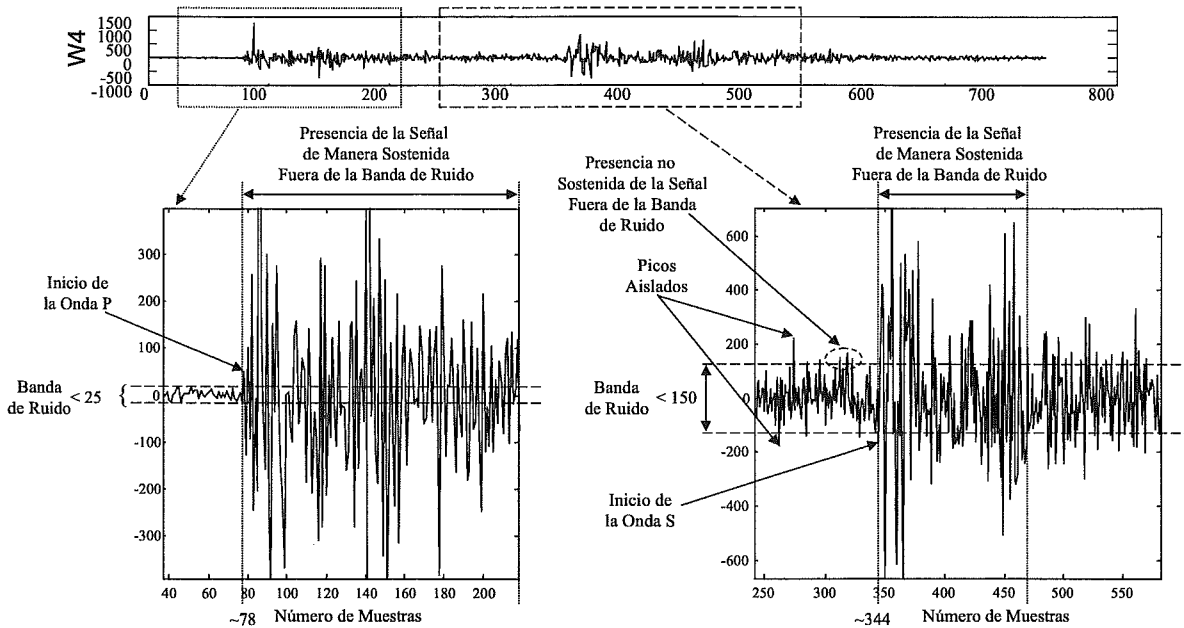


Figura 18. Procedimiento para la localización de las ondas P y S sobre el detalle W4.

su gran capacidad para detección de cambios [6, 8]. En todos los casos, y exactamente como ocurre en otros tipos de análisis, la detección de la onda S es más imprecisa que la de la onda P. A manera de ejemplo se presenta en la Figura 17 el resultado arrojado por el programa para la transformada ondícula de la traza 5206 utilizando ondícula Haar, observándose las salidas W1, W2, W3, W4 y V4 definidas en la Figura 16. El criterio utilizado para determinar la ubicación de las on-

das P y S, tiene sus fundamentos en las mismas bases del criterio seguido por el analista, donde lo relevante son los cambios de amplitud y de comportamiento en la señal, con la diferencia que en este estudio se observan dichos cambios en la descomposición usando transformada ondícula. En la Figura 18 se presenta el procedimiento para el detalle W4, el cual fue el que mejor reflejaba los cambios de la señal.

Tabla 1
Resultados para la ubicación de las ondas P y S usando ondículas Haar y Daubechies-4

| Señal | Tipo | Apreciación | P analista | P Haar | P Daub-4 | Señal | Tipo | Apreciación | S analista | S Haar | S Daub-4 |
|-------------------------------|------|-------------|---------------|-----------|-------------|-------------------------------|------|-------------|---------------|-----------|-------------|
| 4809 | 7 | 10 | 1322 | 1392 | 1392 | 4809 | 7 | | | | 4560 |
| 5122 | 7 | E0 | 1211 | 1264 | 1248 | 5122 | 7 | I2 | 4713 | 3904 | 3392 |
| 5124 | 7 | E0 | 2573 | 2608 | 2720 | 5124 | 7 | | | 5472 | 4720 |
| 5226 | 10 | E0 | 1216 | 1216 | 1248 | 5226 | 10 | | | 4656 | 2416 |
| 5227 | 10 | E0 | 1728 | 1760 | 1760 | 5227 | 10 | | | 4688 | 4624 |
| 5253 | 7 | E2 | 1263 | | 1472 | 5253 | 7 | I2 | 3031 | 2848 | 2816 |
| 5260 | 8 | 10 | 1384 | 1408 | 1376 | 5260 | 8 | | | 4784 | 3712 |
| 5262 | 9 | E2 | 1277 | 1328 | 1280 | 5262 | 9 | E2 | 4783 | 4848 | 5008 |
| 5424 | 9 | E2 | 1525 | 1552 | 1552 | 5424 | 9 | | | 3616 | 3360 |
| 5427 | 10 | E2 | 704 | 736 | 784 | 5427 | 10 | | | 3360 | 2880 |
| 5431 | 9 | E2 | 1071 | 1136 | 1088 | 5431 | 9 | I2 | 2017 | 1936 | 1920 |
| 5305 | 6 | E0 | 2630 | 2704 | 2672 | 5305 | 6 | | | 5232 | 4032 |
| 5304 | 7 | E0 | 1139 | 1232 | 1312 | 5304 | 7 | I0 | 3790 | 3888 | 3648 |
| 5135 | 6 | E2 | 1313 | 1392 | 1360 | 5135 | 6 | | | 3168 | 1920 |
| 5136 | 9 | I2 | 2276 | 2304 | 2192 | 5136 | 9 | | | 3728 | 4704 |
| 5140 | 9 | I2 | 461 | 496 | 544 | 5140 | 9 | | | | 3472 |
| 5141 | 7 | E2 | 985 | 1040 | 1072 | 5141 | 7 | | | 2512 | 1712 |
| 5154 | 7 | E0 | 1450 | 1536 | 1504 | 5154 | 7 | I0 | 3546 | 3520 | 3552 |
| 5156 | 7 | E0 | 1221 | 1264 | 1232 | 5156 | 7 | I0 | 3428 | 3456 | 3056 |
| 5158 | 6 | E0 | 931 | 960 | 944 | 5158 | 6 | I2 | 5023 | 4544 | 4720 |
| Error Promedio | | | | 47.95 | 62.80 | Error Promedio | | | | 221.13 | 335.13 |
| Desviación Estándar del Error | | | | 24.63 | 46.15 | Desviación Estándar del Error | | | | 279.82 | 414.59 |

Al aplicar estos criterios se detectaron las ondas P y S usando la ondícula Haar y la ondícula Daubechies-4. Los resultados para el peor caso (Trazas ruidosas) se sintetizan en la Tabla 1. Dicha tabla presenta el número de la traza, su tipo según nuestra clasificación, su naturaleza (I=Impulsiva; E=Emergente) y las ubicaciones según el analista que recolectó la data, y las obtenidas usando ondículas Haar y Daubechie-4 en número de muestras. Recordando que la frecuencia de muestreo es de 100 Hz cada muestra representa 0.01 segundos. Observe que en muchos casos al

analista le fue imposible ubicar la onda S en estos registros de alto ruido.

En líneas generales, el inicio de la onda P es detectable utilizando el detalle W4 de la transformada ondícula, con márgenes de error en promedio cercanos a 0.5 segundos con la ondícula Haar; mientras que la localización del inicio de la onda S utilizando el mismo detalle de la transformada y la misma ondícula, presenta un error promedio cercano a 2,25 segundos para el peor caso (en presencia de alto ruido).

Conclusiones

Se ha presentado la transformada de ondículas partiendo del análisis tradicional de Fourier y la teoría de bancos de filtros de reconstrucción perfecta para finalmente relacionar ambas herramientas. El análisis de los filtros bajo la óptica de esquemas multiresolución permite encontrar la relación entre las respuestas impulsivas de los filtros pasabajo y pasaalto con la ondícula madre.

Así, la transformada ondícula puede calcularse como la proyección de la señal sobre cada uno de los escalamientos y traslaciones de una ondícula madre o, pasando la señal por un banco de filtros pasabajos y pasabandas con respuestas impulsivas determinadas para lograr la mejor descomposición en bandas y reconstrucción sin distorsión de la señal.

Otra forma de interpretar la transformada ondícula es como una descomposición de la señal a diferentes niveles de resolución. El pasar una señal por ramas de filtraje pasaalto y pasabajo es como verla a otro nivel de resolución; siempre la salida pasaalto estará asociada a los detalles. Un ejemplo clásico es el de mirar un mapa global y luego hacer un zoom en la región de mayor interés; estas regiones serían las salidas de las ramas pasaalto del banco de filtros.

En general, para aplicar la descomposición en ondículas, se puede comenzar con ondículas típicas como las ondícula Haar, Daubechies, Coiflets, Meyer, etc. Otra posibilidad es utilizar criterios para buscar las bases más adecuadas para la aplicación particular. Entre estos esquemas están: Matching pursuit o búsqueda de adaptación y Near Best Basis [6].

Con respecto a la aplicación presentada, respecto a la detección de las ondas P y S, se pueden comparar los resultados con los obtenidos por Anant y Dowla en su estudio con tres componentes [28], cuyas diferencias para la P estaban alrededor de los 4 segundos y para la S en 8 segundos. Se observa que el método planteado en este trabajo produce resultados más precisos requiriendo sólo la componente vertical del sismograma.

Referencias Bibliográficas

1. Morlet, J. et al.: "Wavelet propagation and sampling theory", *Geophysics*, Vol. 47, (1982), 203-236
2. Mujica, F., D'Alvano, F., Brusciannelli, C. and Ros, D.: "A simple wavelet based perceptual audio coder", *Proceedings of the International Conference on Signal Processing Technology, USA (1996)*, 1933-1937.
3. Mallat, S.: "A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.11, N° 7, (1989), 674-693.
4. Durka, P.: "Time-frequency analysis of EEG", PhD Thesis. Warsaw University, Marzo 1997. <http://info.fuw.edu.pl/~durka>.
5. Gavat, I., Zirra, M., Enescu, V.: "Pitch detection of speech signals by dyadic wavelet transform", *Proceedings of the International Conference on Signal Processing Technology, USA (1996)*, 1630-1634.
6. Strang, G., Nguyen, T.: "Wavelets and Filter Banks", *Wellesley-Cambridge Press, USA*, 1996.
7. Taswell, C.: "Specifications and Standards for reproducibility of wavelets transforms", *Proceedings of the International Conference on Signal Processing Technology, USA (1996)*, 1923-1927.
8. Abondano, M.: "Análisis tiempo-frecuencia y tiempo escala de sismogramas", Tesis de pregrado, Universidad Simón Bolívar, Marzo 1996.
9. Bertrand, O., Bohorquez, J. and Pernier, J.: "Time-Frequency digital filtering based on an invertible wavelet transform: An Application to Evoked Potentials", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 41, N° 1, (1994), 340-352.
10. Shen, Q., Tahernezehadi, M.: "A wavelet based approach for acoustic echo cancellation", *Proceedings of the International Conference on Signal Processing Technology, USA (1996)*, 1954-1958.